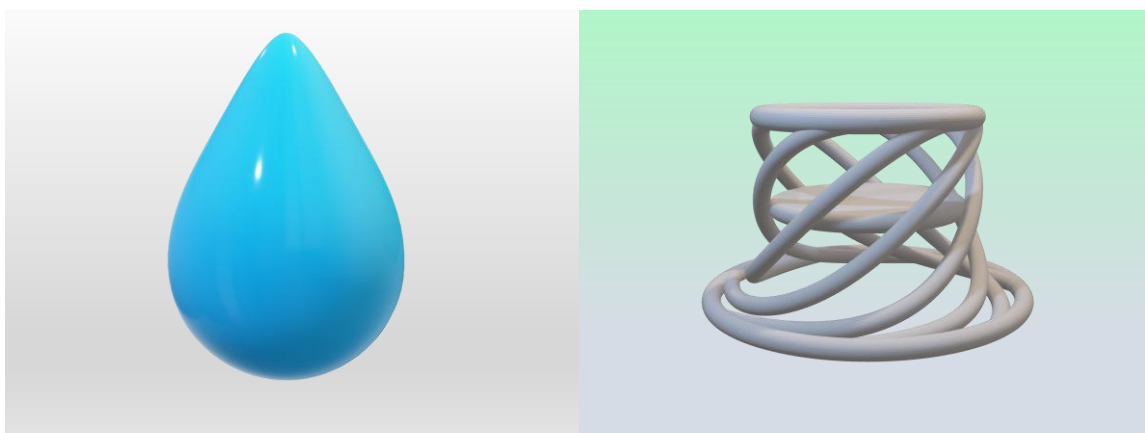


Kuhljevi dnevi

2026



Zbornik del

Zbornik del

Kuhljevi dnevi 2026

Čatež, 16.–18. september 2026

Uredila:

Boštjan Harl

Nenad Gubeljak

ZBORNIK DEL

Uredila:

Boštjan Harl
Nenad Gubeljak

Recenzije:

Blaž Kamenik
Boštjan Harl
Branko Nečemer
Dejan Zupan
Gregor Harih
Janez Urevc
Janko Slavič
Jožef Predan
Jure Ravnik
Lidija Slemenik Perše
Marko Kegl
Marko Motaln

Martin Česnik
Matej Borovinšek
Matej Fike
Matej Zadravec
Matjaž Hriberšek
Matjaž Ramšak
Miroslav Halilovič
Nejc Novak
Nenad Gubeljak
Tomaž Hozjan
Zoran Ren

Izdalo in založilo:

SLOVENSKO DRUŠTVO ZA MEHANIKO

Jamova 2, 1000 Ljubljana

September, 2026

Grafično oblikovanje naslovnice:

Boštjan Harl

Cena:

Knjiga je prosto dostopna na spletni strani Slovenskega društva za mehaniko

Kataložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani
COBISS.SI-ID 291023619
ISBN 978-961-971116-1-3 (PDF)

L. Roblek, R. Kunc, A. Žerovnik, J. Korelc, L. Petrini	1–10
---	-------------

Nova asimetrična funkcija za izboljšano modeliranje natezno-tlačne asimetrije in torzijskega odziva zlitin z oblikovnim spominom

11–20

M. Ramšak, T. Gomboc, M. Zadavec, J. Ravnik, G. Harih, A. Ličen, M. Hriberšek
--

Numerična analiza pršilke za nos

I. Dominik Horvat, K. Vidjak, J. Wedel, J. Iljaž, B. Kamenik, D. Poljak, J. Ravnik	21–30
---	--------------

Eksperimentalno podprto elektromagnetno-toplotno modeliranje segrevanja glave pri uporabi brezžičnih ušesnih slušalk

T. Mušič, M. Česnik	31–39
----------------------------	--------------

Ocena hitrosti poškodbe v dinamskem sistemu s kontaktno nelinearnostjo na podlagi frekvenčnih prenosnih funkcij s pomočjo 1D konvolucijske nevronske mreže

R. Petrovčič, M. Česnik, J. Slavič	40–50
---	--------------

Temperaturna odvisnost parametrov utrujanja 3D-natisnjenih PEEK struktur

M. Zupan, J. Slavič	51–59
----------------------------	--------------

3D-natisnjeni pametni metamateriali v enem procesu

T. Hozjan, U. Rodman, S. Huč	60–67
-------------------------------------	--------------

Napovedovanje dolgoročnega obnašanja lesenega nosilca skozi celotno življenjsko dobo

T. Plavčak, D. Zupan	68–76
-----------------------------	--------------

Ohranjanje energije in zagotavljanje zveznosti deformacijskih količin nelinearnih ravninskih nosilcev

M. Kegl, B. Harl, N. Gubeljak, J. Predan	77–84
<i>Uporaba konfiguracijskih sil pri izboljšavi mreže končnih elementov in optimizaciji oblike</i>	
A. Nikonov, B. Zupančič, M. Nagode, J. Klemenc	85–93
<i>Modalna analiza disperzije Lambovih valov v trislojnih plastovitih kompozitnih ploščah s kontrastnimi materialnimi lastnostmi slojev</i>	
M. Mir, B. Nečemer, J. Kaljun, A. Cupar, B. Hanželič, V. Plesec, G. Harih	94–104
<i>Vpliv žarjenja na mehanske in geometrijske lastnosti 3D tiskanega PLA</i>	
D. Godec, M. Hriberšek, J. Ravnik	105–116
<i>Razvoj in validacija metode končnih volumnov za 3D model liofilizacije v viali</i>	
M. Založnik, B. Kamenik, M. Hriberšek, M. Zadravec	117–128
<i>Numerična analiza vpliva procesnih parametrov na enakomernost zamrzovanja vial pri liofilizaciji s kontrolirano nukleacijo</i>	
J. Wedel, N. Harl, P. Steinmann, M. Hriberšek, J. Ravnik	129–136
<i>Dinamika superelipsoidnih delcev v stensko omejeni turbulenci na osnovi DNS</i>	
J. Wedel, P. Steinmann, M. Hriberšek, J. Ravnik	137–145
<i>Viskoelastični mehki delci v enostavnem strižnem toku</i>	
P. Kočman, I. Planinc, B. Čas	146–155
<i>Točne uklonske sile večetažnih ter večpoljnih jeklenih ravninskih okvirjev</i>	
T. Hrovat, J. Urevc, M. Halilović	156–164
<i>Razvoj simulacijskega okolja TimoLab za analizo odzivnih spektrov okvirnih konstrukcij</i>	
N. Vovk, J. Wedel, S. Rustico, I. D. Horvat, B. Pulvirenti, P. Steinmann, J. Ravnik	165–175
<i>Modeliranje vpliva izhlapevanja pri 3D CFD simulaciji segrevanja vlažne opeke v gospodinjski pečici</i>	
T. Vrtač, D. Ocepek, G. Čepon	176–183
<i>Hibridni pristop za tvorbo učnih podatkov za strojno učenje pri diagnostiki poškodovanosti spojev v sestavljenih konstrukcijah</i>	

D. Fijavž, Ž. Žnidarič, S. Glodež, B. Nečemer **184–192**

Eksperimentalna analiza vpliva temperature na odpornost medicinskih katetrov proti prepogibanju in lokalni izgubi stabilnosti

F. Jerenec, M. Nishi, N. Novak, Z. Ren **193–202**

Demonstracija postopka analize eksplozijskega vala pri avksetični zaščitni strukturi z uporabo Viper::Blast in LS-DYNA

203–215

A. Roger, M. Fike

Meritev debeline mejne plasti na rotirajočem se disku v vodi z uporabo merilnega sistema LDA

A. Rikić, M. Borovinšek **216–225**

Poissonovo razmerje rotiranih vbočenih avksetičnih struktur

Ž. Donik, F. Jerenec **226–234**

Zasnova pacientu prilagojene nepokrite žilne opornice na podlagi geometrijske karakterizacije aorte

Ž. Donik, S. Glodež, J. Kramberger, T. Lagoda, J. Klemenc **235–244**

Numerično modeliranje gumenih kompozitov s kontinuirnimi vlakni

M. Motaln, T. Vuherer, T. Lerher **245–251**

Kalibracija numeričnih modelov nekohezivnih praškov in sipkih trdnin

N. Novak, V. Skaza, O. Al-Ketan, M. Vesenjaj, Z. Ren **252–262**

Numerično modeliranje mehanskega odziva stohastičnih TPMS-struktur, izdelanih z dodajalno tehnologijo in litjem

Povzetek plakata

M. Krmelj, M. Česnik **263**

Identifikacija obratovalne oblike strukture s premikajočo hitro kamero

Generalni sponzor



GEN-Energija

Sponzor



Messer Slovenija d.o.o.



Nova asimetrična funkcija za izboljšano modeliranje natezno-tlačne asimetrije in torzijskega odziva zlitin z oblikovnim spominom

Luka Roblek¹, Robert Kunc¹, Andrej Žerovnik¹, Jože Korelc², Lorenza Petrini³

A Novel Asymmetric Function for Improved Tension–Compression Asymmetry and Torsion Response in Shape Memory Alloys

Povzetek: Zlitine z oblikovnim spominom (SMA – Shape Memory Alloys) predstavljajo skupino pametnih materialov, ki izkazujejo efekt oblikovnega spomina in superelastičnost. Zaradi kompleksnega termo-mehanskega obnašanja ter izrazite asimetrije med nateznim, tlačnim in torzijskim odzivom ostaja njihovo numerično modeliranje zahteven raziskovalni problem. V prispevku je predstavljena nova asimetrična funkcija, namenjena izboljšanju konstitutivnega modeliranja SMA materialov. Predlagani pristop omogoča neodvisno določanje parametrov za natezno, tlačno in torzijsko obremenitev neposredno iz eksperimentalnih napetostno-deformacijskih krivulj. Nova funkcija je implementirana v razširjeni Auricchio-Petrini model, pri čemer model omogoča izboljššan opis transformacijskih napetosti, širine histerezne zanke, dolžine ter naklona transformacijske platoja. Poleg tega model vključuje temperaturno odvisnost materialnih parametrov in različen modul elastičnosti za avstenitno, multivariantno martenzitno in enovariantno martenzitno fazo. Validacija modela je bila izvedena z numeričnimi simulacijami ter primerjavo z eksperimentalnimi rezultati pri enoosnih in večosnih obremenitvah. Rezultati kažejo, da predlagani model bistveno izboljša napovedovanje asimetričnega odziva SMA materialov ter omogoča bolj realistično simulacijo superelastičnosti in efekta oblikovnega spomina.

Abstract: Shape memory alloys (SMAs) are intelligent materials exhibiting shape memory effect and superelasticity. Due to their complex thermomechanical behavior and pronounced asymmetry between tension, compression, and torsion responses, accurate constitutive modeling remains a major challenge. This paper presents a novel asymmetric function for improved constitutive modeling of SMA materials. The proposed approach enables independent parameter definition for tensile, compressive, and torsional loading directly from experimental stress–strain data. The asymmetric function is implemented into an enhanced Auricchio–Petrini model, allowing improved description of transformation stresses, hysteresis width, transformation plateau length, and hardening behavior. Furthermore, the model incorporates temperature-dependent material parameters and different elastic moduli for austenite, multi-variant martensite, and single-variant martensite phases. The proposed model is validated through numerical simulations and comparison with experimental results under uniaxial and multiaxial loading conditions. The results demonstrate significantly improved prediction of asymmetric SMA behavior and provide a more realistic representation of superelasticity and shape memory effect.

1 Uvod

Zlitine z oblikovnim spominom (SMA - Shape Memory Alloys) predstavljajo posebno skupino kovinskih materialov, ki zaradi martenzitne fazne transformacije izkazujejo izjemne mehanske in termične lastnosti. Najpomembnejši lastnosti teh materialov sta efekt oblikovnega spomina (SME - Shape Memory Effect) ter superelastičnost (SE - Superelasticity). Efekt oblikovnega spomina omogoča, da material po plastični

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

³ Politecnico di Milano, Department of Civil and Environmental Engineering

deformaciji ponovno zavzame prvotno obliko ob segrevanju nad temperaturo zaključka avstenitne transformacije. Superelastičnost pa omogoča velike reverzibilne deformacije pri obremenjevanju nad temperaturo avstenitnega območja.

Kompleksno obnašanje SMA materialov je posledica prehoda med avstenitno in martenzitno fazo. Pri mehanski obremenitvi pride do napetostno inducirane transformacije, pri kateri se multivariantni martenzit pretvori v enovariantni martenzit. Obraten proces nastopi pri razbremenitvi ali segrevanju materiala. Zaradi teh transformacij SMA materiali izkazujejo izrazito natezno-tlačno asimetrijo, kar pomeni, da se njihov mehanski odziv razlikuje pri natezni, tlačni in torzijski obremenitvi.

Ekspperimentalne raziskave kažejo, da se asimetrija pojavlja pri več materialnih parametrih, kot so transformacijske napetosti, širina histerezne zanke, naklon transformacijskega platoja, maksimalna transformacijska deformacija ter modul elastičnosti [1], [2], [3], [4]. Obstoječi konstitutivni modeli pogosto omogočajo zgolj omejen opis asimetrije, pri čemer večina modelov temelji predvsem na spremembi transformacijskih napetosti. Posledično takšni modeli ne omogočajo dovolj natančne simulacije večosnih obremenitev in kompleksnih termo-mehanskih procesov.

V literaturi je predstavljenih več pristopov za modeliranje natezno-tlačne asimetrije pri SMA materialih, med drugim tudi modeli, opisani v [5], [6], [7], [8]. Nekateri modeli uporabljajo invariante napetostnega ali deformacijskega tenzorja, drugi uvajajo ločene transformacijske površine za natezno in tlačno stanje. Kljub temu številni modeli zahtevajo zahtevno numerično kalibracijo parametrov ali pa so omejeni zgolj na superelastično obnašanje.

V predstavljeni raziskavi je razvita nova asimetrična funkcija, ki omogoča neposredno določitev materialnih parametrov iz eksperimentalnih napetostno-deformacijskih diagramov. Predlagani pristop omogoča ločeno definiranje parametrov za natezno, tlačno in torzijsko obremenitev ter izboljšuje večosni odziv materialnega modela. Funkcija je implementirana v Auricchio-Petrini (A-P) model [9], ki je zaradi svoje robustnosti in enostavne implementacije eden najbolj razširjenih modelov za simulacijo SMA materialov.

2 Metodologija

2.1 Omejitve originalnega Auricchio-Petrini modela

Originalni A-P model predstavlja enega najbolj uporabljenih konstitutivnih modelov za SMA materiale. Model temelji na postopku s t.i. »reverse-mapping« algoritmom in uporablja transformacijsko deformacijo kot notranjo spremenljivko. Kljub številnim prednostim ima originalni model več pomembnih omejitev, saj uporablja enoten modul elastičnosti za vse faze materiala, histerezna zanka je neodvisna od temperature, asimetrija je omejena predvsem na transformacijske napetosti, ni mogoče ločeno definirati odziva pri torziji ter ima zelo omejeno razmerje natezno-tlačne asimetrije zaradi zahteve po konveksnosti transformacijske površine. Pri višjih temperaturah se zaradi linearne temperaturne odvisnosti zmanjšuje vpliv asimetrije, kar povzroči odstopanje od eksperimentalno opaženega obnašanja. Poleg tega model ne omogoča dovolj realističnega opisa širine histerezne zanke in spremembe naklona transformacijskega platoja. Konstitutivne enačbe in omenjene pomanjkljivosti za popis asimetrije A-P modela so opisane v izvornem članku [11].

2.2 Razvoj nove asimetrične funkcije

Glavni cilj raziskave je bil razviti matematično funkcijo ρ , ki omogoča bolj realističen opis asimetričnega odziva SMA materialov. Predlagani pristop temelji na definiciji materialnih parametrov kot produkta konstantnega člena in nesimetrične funkcije, odvisne od invariant deviatornega deformacijskega tenzorja:

$$\rho_{asym} = \rho_s F(\mathbf{e}) \quad (1)$$

kjer je ρ_s materialni parameter povezan s strigom in $F(\mathbf{e})$ funkcija, odvisna od druge ($J_{2,e}$) in tretje ($J_{3,e}$) invariante deviatornega deformacijskega tenzorja $\mathbf{e}$, definiranega kot:

$$J_{2,e} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^2 : \mathbf{1}), \quad (2)$$

$$J_{3,e} = \frac{1}{3}(\mathbf{e}^3 : \mathbf{1}). \quad (3)$$

$F(\mathbf{e})$ je definiran kot razmerje med simetrično $J_{2,e}$ funkcijo (F_s) in asimetrično $J_{2,e}$ - $J_{3,e}$ funkcijo (F_{as}):

$$F(\mathbf{e}) = \frac{F_s}{F_{as}} = \frac{\sqrt[2]{J_{2,e_s}}}{\sqrt[3]{J_{2,e}^2 - c_\rho J_{3,e}}} \quad (4)$$

kjer je c_ρ materialni parameter, vezan na razmerje natega in tlaka in F_{as} modificirana funkcija, povzeta po Zakiju [10]. Enačba (1) nam da željene vrednosti v nategu in tlaku, če jo pomnožimo z ρ_s , ki v tem primeru še ne predstavlja vrednosti v strigu. Enačbi (1) je potrebno dodati eksponent n_ρ , kar privede do končne oblike enačbe asimetričnega parametra:

$$\rho_{asym} = \rho_s F(\mathbf{e})^{n_\rho}. \quad (5)$$

Da bi enačba (5) zagotavljala ustrezno vrednost v nategu, tlaku in strigu, morata biti faktorja c_ρ in n_ρ povezana, in sicer z enačbama:

$$c_\rho = \operatorname{sgn}(n_\rho) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{r_\rho^{\frac{3 \cdot \operatorname{sgn}(n_\rho)}{n_\rho}} - 1}{\frac{3 \cdot \operatorname{sgn}(n_\rho)}{r_\rho^{\frac{3 \cdot \operatorname{sgn}(n_\rho)}{n_\rho}} + 1}} \quad (6)$$

$$r_\rho = \frac{\rho^+}{\rho^-} \quad (7)$$

kjer je $\operatorname{sgn}(\cdot)$ klasična signum funkcija in r_ρ razmerje med nategom in tlakom. ρ^+ , ρ^- in ρ_s so željene vrednosti v nategu, tlaku in strigu in jih lahko dobimo iz enoosnih in torzijskih preizkusov, kot je opisano v izvirnem članku [11].

Nova funkcija omogoča neodvisno določitev parametrov pri natezni, tlačni in torzijski obremenitvi. Pomembna prednost nove funkcije je možnost neposredne določitve transformacijskih napetosti iz standardnih eksperimentalnih preizkusov. Tako je mogoče parametre modela določiti iz enoosnih nateznih, tlačnih in torzijskih preizkusov brez zahtevnega postopka numeričnega prilagajanja.

2.3 Implementacija nove funkcije v konstitutivni model

Asimetrično Prager-Lode transformacijsko funkcijo lahko zamenjamo s simetrično (von Mises), s tem da je radij funkcije odvisen od stanja obremenitve. Konstanten parameter R torej zamenjamo s spremenljivim R_{asym} , definiranim z enačbami (5), (6), in (7) kjer vsak simbol ρ zamenjamo z R :

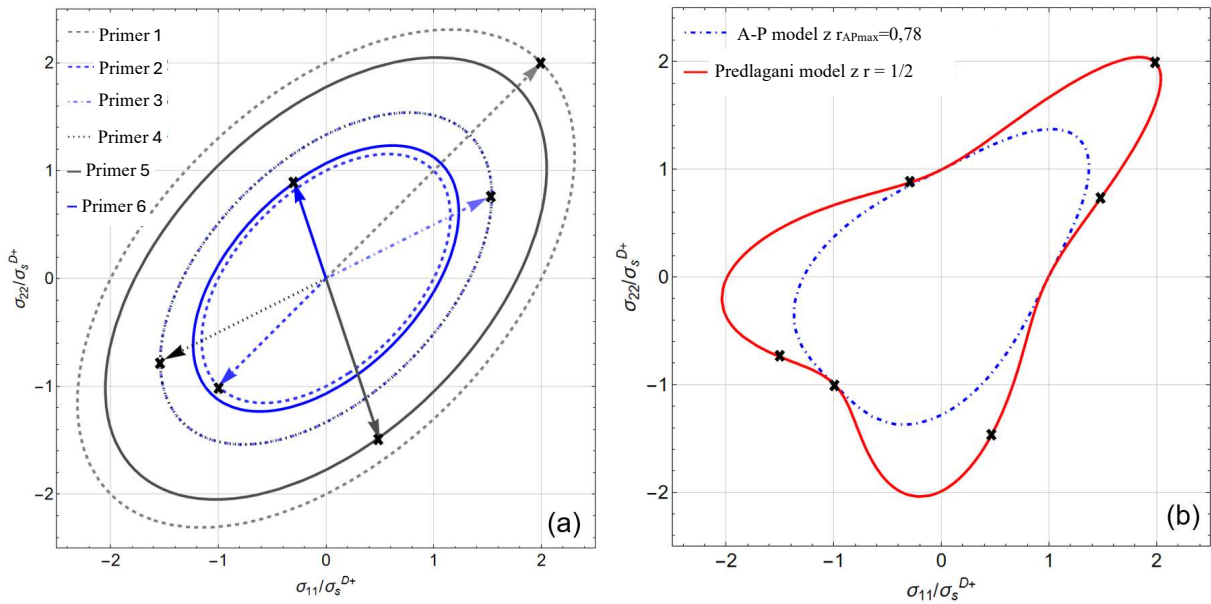
$$F(\mathbf{X}) = \sqrt{2J_2} - R_{asym} \quad (8)$$

$$R_{asym} = R_s F(\mathbf{e})^{n_R} \quad (9)$$

$$r_R = \frac{R^+}{R^-} \quad (10)$$

Kjer so R^+ , R^- in R_s radiji limitne funkcije v nategu, tlaku in strigu, definirani kot $R^+ = \sqrt{2/3} \sigma_s^{D+}$, $R^- = \sqrt{2/3} \sigma_s^{D-}$ in $R_s = \sqrt{2/3} \tau_s^D$ ter so σ_s^{D+} , σ_s^{D-} in τ_s^D vrednosti začetka transformacije v nategu, tlaku in strigu.

V enačbi (8) sta oba člena odvisna od deviatorne deformacije, zato se pri spremembi obremenitvenega stanja spreminja tudi oblika transformacijske funkcije v ravnini glavnih napetosti. Ob predpostavkah $r_R = R^+/R^- = 1/2$, $R_s = 3/2$ in $n_\rho = 3$ je bil parameter R_{asym} izračunan za šest različnih obremenitvenih primerov (Slika 1). Za primerjavo je dodan tudi mejni primer originalnega A-P modela, kjer je upoštevana največja možna asimetrija. Dobljene vrednosti znašajo med 1 in 2, odvisno od kombinacije napetosti. Rezultati kažejo, da je transformacijska površina pri vseh obremenitvenih stanjih konveksna, vendar se njena oblika spreminja glede na smer obremenitve. Analiza potrjuje, da predlagani model omogoča bistveno večjo natezno-tlačno asimetrijo ob hkratnem ohranjanju konveksnosti transformacijske površine, kar predstavlja pomembno izboljšavo glede na originalni Auricchio-Petrini model.



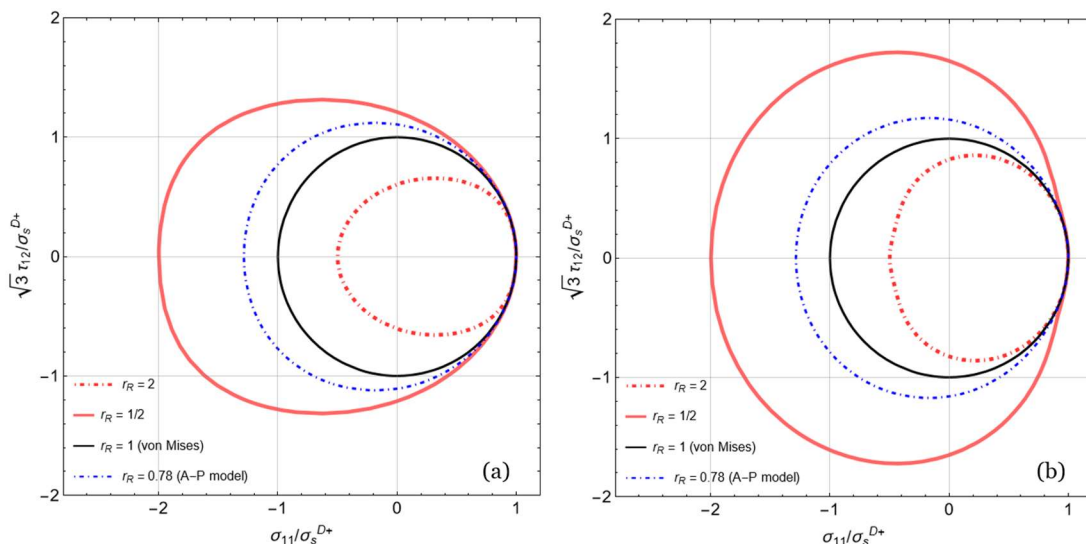
Slika 1: (a) Spreminjanje transformacijske funkcije pri različnih obremenitvah, pri čemer je vrednost R_{asym} ves čas enaka. (b) Krivulja točk, ki povezuje vrednosti simetrične transformacijske funkcije za poljubno obremenitev.

2.4 Transformacijska funkcija v strigu in validacija z eksperimentalnimi podatki

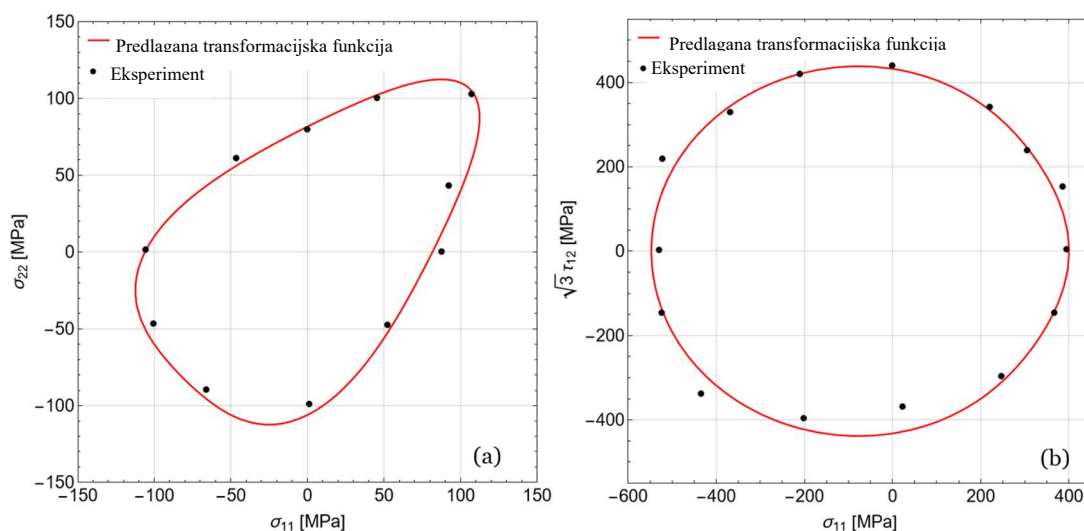
Parameter n_R pomembno vpliva na natezno-torzijski odziv materiala, a ga ni mogoče izraziti analitično iz enačb (5) in (6), temveč ju je treba določiti numerično ob znanih vrednostih ρ^+ , ρ^- in ρ_s . To je mogoče izvesti z uporabo standardnih numeričnih orodij. Analiza različnih vrednosti parametra kaže, da nižje vrednosti povzročijo torzijske transformacijske napetosti, bližje nateznemu odzivu, medtem ko višje vrednosti približajo torzijski odziv tlačnemu. Na Sliki 2 je prikazan vpliv eksponenta n_R v enačbah (14) in (15) na transformacijsko funkcijo (enačba 13) pri biaxialnem obremenjevanju za različne vrednosti r_R (2,

1/2, 1 in 0,78). Primerjana sta primera $n_R = 1$ (a) $n_R = -1$ (b), ki kažeta spremembo oblike funkcije v strigu. Z izborom ustrezne vrednosti n_R tako določimo odziv transformacijske funkcije v strigu.

Validacija predlagane transformacijske funkcije je bila izvedena na zlitinah Cu-Al-Be in Ni-Ti z uporabo eksperimentalno določenih transformacijskih napetosti pri nategu in tlaku. Na Sliki 3 je vidna primerjava eksperimentalnih podatkov napetosti začetka transformacije (povzetih po [2]) in predlagane asimetrične transformacijske funkcije za Cu-Al-Be pri 35 °C v $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ ravnini (a) ter za Ni-Ti pri 50 °C v $(\sigma_{11}, \sqrt{3}\tau_{12})$ ravnini (b). Primerjava kaže dobro ujemanje ter potrjuje, da predlagani model uspešno zajame asimetrično obnašanje SMA materialov. S tem pristopom se transformacijska površina prilagaja različnim obremenitvenim stanjem. Posledično model omogoča izboljšano simulacijo natezno-tlačne asimetrije, ločeno obravnavo torzijskega odziva, večjo fleksibilnost pri večosnih obremenitvah, boljše ujemanje z eksperimentalnimi rezultati.



Slika 2: Vpliv eksponenta n_R na spremembo oblike funkcije v strigu. Primerjana sta primera $n_R = 1$ (a) $n_R = -1$ (b).



Slika 3: Primerjava eksperimentalne in predlagane asimetrične transformacijske funkcije v $(\sigma_{11}, \sigma_{22})$ ravnini (a) in v $(\sigma_{11}, \sqrt{3}\tau_{12})$ ravnini (b).

3 Nadgradnje materialnega modela

3.1 Temperaturno odvisna histerezna zanka

Ena od dodatnih izboljšav modela je uvedba temperaturno odvisne širine histerezne zanke. V originalnem A-P modelu ostaja širina histereze konstantna ne glede na temperaturo, kar ne ustreza eksperimentalnim opažanjem. V izboljšanem modelu je bil uveden temperaturno odvisen parameter transformacijske površine, definiran v treh temperaturnih območjih:

1. območje pod temperaturo M_f ,
2. prehodno območje med M_f in A_f ,
3. območje nad temperaturo A_f .

Pristop je detajlno opisan v izvornem članku [11] in omogoča realistično zmanjševanje histerezne zanke pri višjih temperaturah ter izboljšano simulacijo SE odziva.

3.2 Fazno in temperaturno odvisen modul elastičnosti

Eksperimentalne raziskave kažejo, da imajo avstenitna, multivariantna martenzitna in enovariantna martenzitna faza različne vrednosti modula elastičnosti. Zaradi tega je bil v model uveden temperaturno in fazno odvisen modul elastičnosti. Skupni modul elastičnosti je definiran kot funkcija temperature ter faznega stanja materiala. Predlagani pristop omogoča bistveno bolj realistično simulacijo mehanskega odziva pri prehodih med fazami.

3.3 Posodobitev energijske funkcije

Na podlagi uvedenih temperaturno in fazno odvisnih parametrov je bila posodobljena tudi deformacijska energijska funkcija modela. V novo funkcijo so bili vključeni:

- asimetrija transformacijskih napetosti,
- asimetrija širine histereze,
- asimetrija transformacijske deformacije,
- asimetrija naklona transformacijske platoja,
- različni moduli elastičnosti.

Posodobljena energijska funkcija ohranja termodinamsko konsistentnost modela in omogoča uporabo v numeričnih simulacijah končnih elementov.

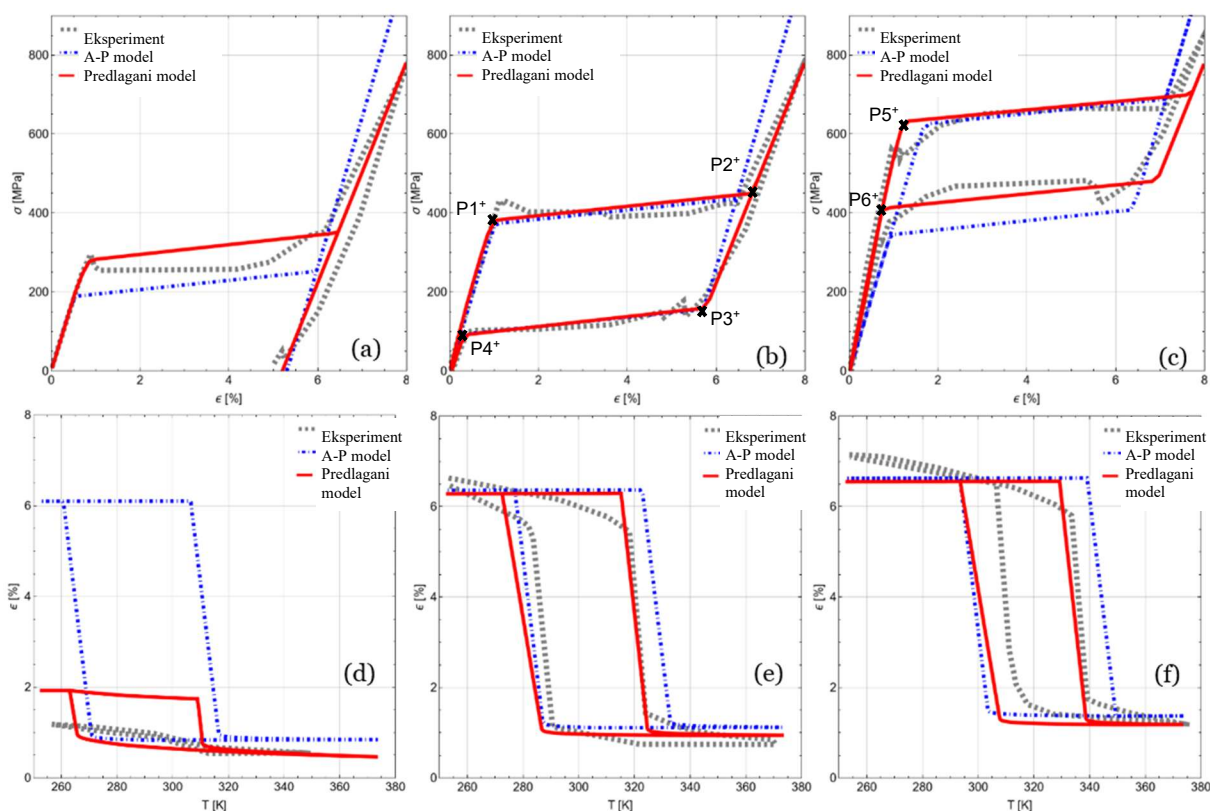
4 Numerična validacija modela

Validacija modela je bila izvedena z uporabo programskega okolja AceFEM. Analiziran je bil odziv posameznega 3D končnega elementa pri različnih proporcionalnih in neproporcionalnih obremenitvenih primerih. Parametri predlaganega materialnega modela se pridobijo neposredno iz napetostno-deformacijskih krivulj in poznavanja temperatur faznega prehoda. Povezava med potrebnimi eksperimentalnimi podatki ter predlaganim modelom je opisan v izvornem članku [11].

4.1 Enosni natezni preizkusi

Najprej je bila izvedena primerjava numeričnih rezultatov z eksperimentalnimi podatki za NiTi žice pri različnih temperaturah. Parametri modela so bili določeni neposredno iz napetostno-deformacijskih diagramov, predstavljenih v raziskavi Sittnerja [4]. Na Sliki 4 so eksperimentalni rezultati enosnih nateznih preizkusov primerjani s predlaganim modelom in originalnim A-P modelom pri treh temperaturah: 253 K (a), 283 K (b) in 333 K (c). Označene točke predstavljajo podatke za kalibracijo modela, simbol “+” označuje natežno obremenitev. Prikazani so tudi cikli toplotne obremenitve pri konstantnih napetostih 300 MPa (d), 400 MPa (e) in 500 MPa (f), prav tako v primerjavi z eksperimentalnimi podatki in A-P modelom.

Rezultati so pokazali boljše ujemanje histerezne zanke, boljši opis temperaturne odvisnosti, izboljšano simulacijo superelastičnosti in bolj realističen opis transformacijskih deformacij. Predlagani model je uspešno zajel zmanjševanje temperaturne histereze pri višjih obremenitvah, medtem ko originalni A-P model tega ni omogočal.



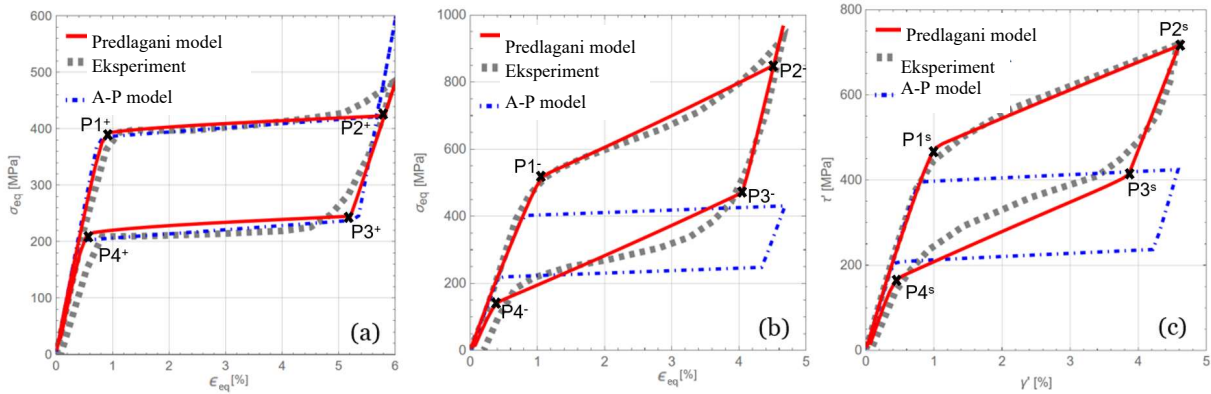
Slika 4: Primerjava enosnih nateznih preizkusov predlaganega modela z eksperimentalnimi rezultati in originalnim A-P modelom pri treh temperaturah: 253 K (a), 283 K (b) in 333 K (c).

4.2 Večosni neproporcionalni preizkusi

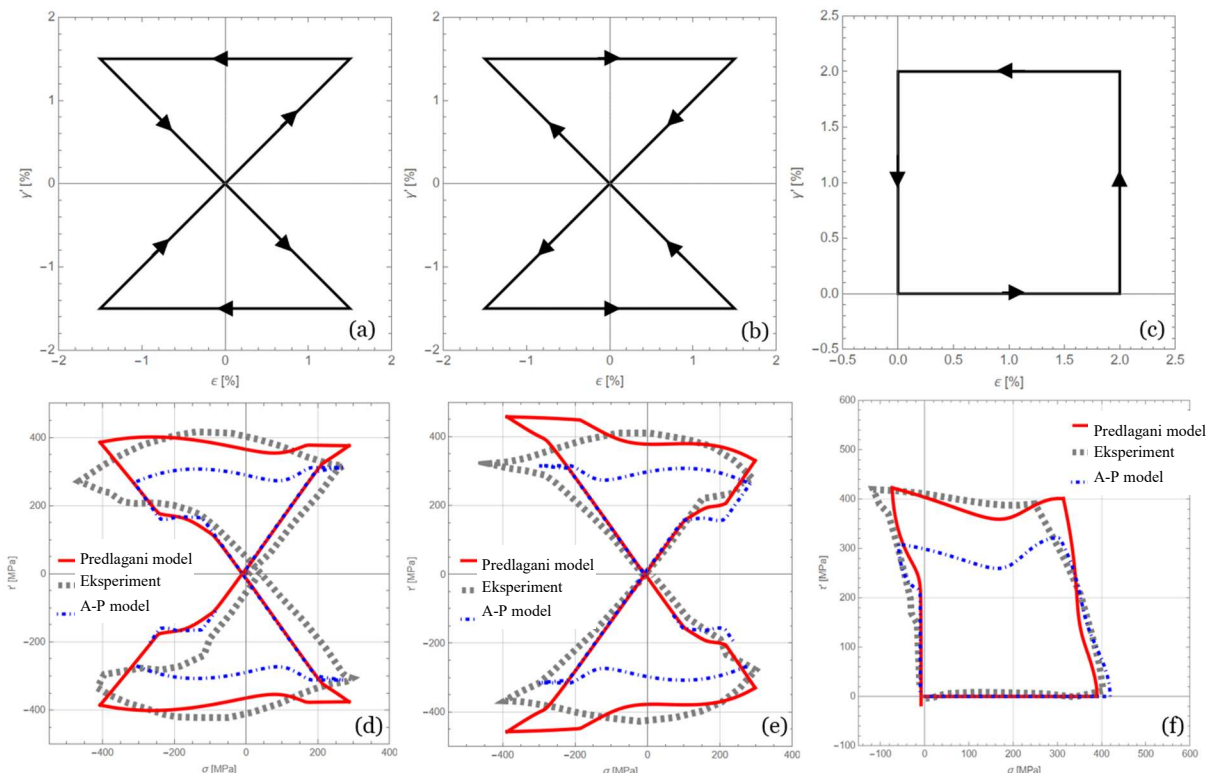
Nadaljnja validacija je bila izvedena pri kombiniranih natežno-torzijskih in tlačno-torzijskih obremenitvah. Uporabljeni so bili eksperimentalni podatki za neproporcionalne obremenitvene poti [1]. Na Sliki 5 so najprej prikazani odzivi predlaganega modela in originalnega A-P modela v primerjavi z eksperimentalnimi podatki pri enosni natezni (a), tlačni (b) in torzijski (c) obremenitvi. Označene točke so uporabljene za

kalibracijo modela; simboli “+”, “-” in “s” označujejo natezno, tlačno in strižno/torzijsko obremenitev. Oba modela sta nato uporabljena za neproporcionalne obremenitvene poti z nadzorovanim pomikom, kar je prikazano na Sliki 6. Zgornja vrsta prikazuje deformacijske poti, spodnja pa ustrezne napetostne odzive.

Rezultati kažejo, da predlagani model bolje opisuje torzijski odziv, izboljšano simulira tlačno obnašanje, omogoča bolj realistično večosno transformacijo in natančnejše napove napetostne poti pri kompleksnih obremenitvah. Posebej pomembno je, da razlike med originalnim in izboljšanim modelom postanejo še izrazitejše pri večjih deformacijah. To potrjuje, da je novi pristop primernejši za simulacijo kompleksnih obremenitvenih stanj.



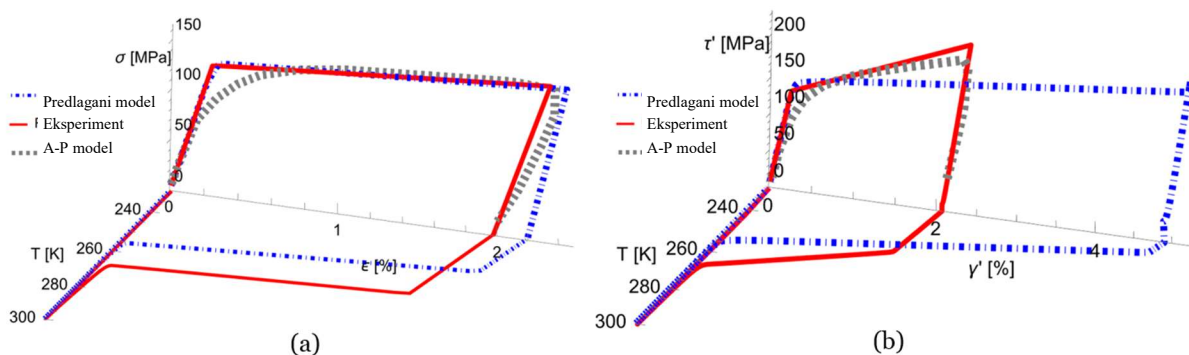
Slika 5: Primerjava numeričnih rezultatov predlaganega modela in originalnega A-P modela z eksperimentalnimi podatki pri enosni natezni (a), tlačni (b) in torzijski (c) obremenitvi.



Slika 6: Primerjava numeričnih rezultatov z eksperimentalnimi podatki za neproporcionalne obremenitvene poti z nadzorovanim pomikom.

4.3 Termični cikli pri obremenitvi in prosti povrnitvi oblike

Izvedeni so bili tudi termični cikli pri natezni in torzijski obremenitvi z namenom analize enosmernega efekta oblikovnega spomina, povzete po [1]. Primerjava eksperimentalnih rezultatov z originalnim A-P modelom in predlaganim modelom kaže dobro ujemanje pri nateznem odzivu, pri čemer se razlike pojavljajo predvsem zaradi različnega modula elastičnosti martenzitne faze (Slika 7 a). Pri torzijskem odzivu (Slika 7 b) originalni A-P model ni omogočal ustrezne prilagoditve naklona transformacijskega platoja, zaradi česar je prišlo do precenitve transformacijske deformacije. Predlagani model je zaradi večje fleksibilnosti pri opisu torzijskega odziva bistveno bolj zajel eksperimentalno opaženo obnašanje ter pokazal zelo dobro ujemanje z meritvami.



Slika 7: Natežno (a) in torzijsko (b) obremenjevanje ter razbremenjevanje martenzita ($T < M_f$), čemur sledi cikel segrevanja $T > A_f$ in ohlajanja do $T < M_f$.

5 Zaključek

Rezultati raziskave potrjujejo, da predlagana asimetrična funkcija predstavlja pomembno izboljšavo pri modeliranju zlitin z oblikovnim spominom. Ključna prednost pristopa je neposredna povezava med eksperimentalnimi rezultati in materialnimi parametri modela, saj je parametre mogoče določiti neposredno iz nateznih, tlačnih in torzijskih preizkusov. Model omogoča ločeno obravnavo nateznega, tlačnega in torzijskega odziva ter izboljšano simulacijo večosnih in neproporcionalnih obremenitev ob hkratnem ohranjanju termodinamske konsistentnosti in primernosti za implementacijo v metodo končnih elementov. Numerične simulacije in primerjava z eksperimentalnimi rezultati kažejo bistveno boljše ujemanje v primerjavi z originalnim Auricchio-Petrini modelom, predvsem pri opisu transformacijskih napetosti, širine histerezne zanke, torzijskega odziva in temperaturne odvisnosti materiala. Predlagani model zato predstavlja pomemben korak k bolj realističnemu in praktično uporabnemu modeliranju SMA materialov za uporabo pri simulacijah aktuatorjev, pametnih struktur in drugih naprednih inženirskih aplikacij. Kljub izboljšavam model še vedno temelji na linearni aproksimaciji posameznih delov napetostno-deformacijskega odziva, zato bodo nadaljnje raziskave usmerjene v razvoj gladkih transformacijskih funkcij ter vključitev ciklične degradacije materiala.

Literatura

- [1] F. C. Grabe, *Experimental testing and parameter identification on the multidimensional material behavior of shape memory alloys*, 2007, Accessed: Dec. 18, 2023.
- [2] K. Lavernhe-Taillard *et al*, *Multiaxial One-Way Shape Memory Effect and Superelasticity*, Jan. 2007.
- [3] B. Reedlunn *et al*, *Tension, compression, and bending of superelastic shape memory alloy tubes*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 63, pp. 506–537, 2014.
- [4] P. Sittner *et al.*, *Roundrobin SMA modeling*, European Symposium on Martensitic Transformations, 2009.
- [5] C. Bouvet, S. Calloch, and C. LExcellent, *A phenomenological model for pseudoelasticity of shape memory alloys under multiaxial proportional and nonproportional loadings*, European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 23, no. 1, pp. 37–61, 2004.
- [6] M. Y. Alsawalhi and C. M. Landis, *A new phenomenological constitutive model for shape memory alloys*, Int. J. Solids Struct., vol. 257, p. 111264, 2022.
- [7] Z. Rao *et al*, *A three-dimensional constitutive model for shape memory alloy considering transformation-induced plasticity, two-way shape memory effect, plastic yield and tension-compression asymmetry*, European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 99, p. 104945, 2023.
- [8] L. A. Woodworth *et al*, *A multi-featured shape memory alloy constitutive model incorporating tension–compression asymmetric interpolation*, Mechanics of Materials, vol. 172, p. 104392, 2022.
- [9] F. Auricchio and L. Petrini, *A three-dimensional model describing stress-temperature induced solid phase transformations: solution algorithm and boundary value problems*, Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 61, no. 6, pp. 807–836, 2004.
- [10] W. Zaki, *An approach to modeling tensile–compressive asymmetry for martensitic shape memory alloys*, Smart Mater. Struct., vol. 19, no. 2, p. 25009, 2010.
- [11] L. Roblek *et al*, *A novel asymmetric function to improve tension-compression asymmetry and torsion response and its implementation to Auricchio-Petrini model for shape memory alloys*, European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 112, p. 105650, Jul. 2025.



Numerična analiza pršilke za nos

Numerical Analysis of a Nasal Spray

**Matjaž Ramšak,¹ Timi Gomboc,¹ Matej Zadravec,¹ Jure Ravnik,¹ Gregor Harih,¹
Anže Ličen,^{2,3} in Matjaž Hriberšek¹**

Povzetek. Prispevek obravnava numerično simulacijo aplikacije pršilke za nos v povprečnem modelu nosne votline. Zračni tok je bil izračunan v programu Ansys Fluent, kapljice pa so bile opisane z Lagrangevim diskretnim faznim modelom. Namen analize je oceniti vpliv položaja in usmerjenosti pršilke, velikosti kapljic, hitrosti curka ter vdiha na regionalno depozicijo učinkovine. Rezultati pokažejo, da se večina kapljic odloži v sprednjem delu nosu, medtem ko je dostava v olfaktorno območje zelo občutljiva na geometrijo nosu in nastavitve pršilke.

Abstract. The paper presents a numerical analysis of nasal spray administration in an average nasal cavity model. The airflow field was computed in Ansys Fluent, while droplets were described by a Lagrangian discrete phase model. The objective is to assess the influence of spray position, administration angle, droplet size, jet velocity, and inhalation on regional deposition. The results show dominant deposition in the anterior nasal region, whereas delivery to the olfactory region is highly sensitive to nasal geometry and spray settings.

1 Uvod

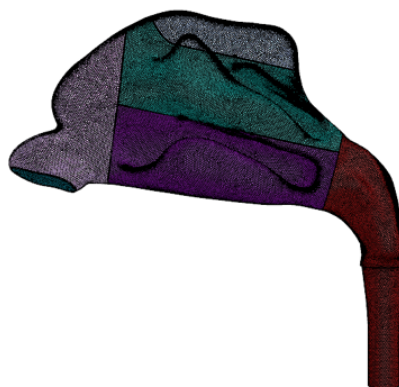
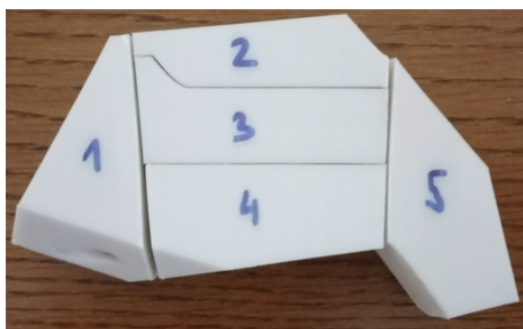
Pršilke za nos so razširjen način lokalne dostave učinkovin, vendar njihove učinkovitosti ne določa le formulacija zdravila. Odločilno je, kam se kapljice po aktivaciji dejansko odložijo. Pri aplikaciji se hkrati prepletajo anatomija nosne votline, dihanje, položaj šobe, kot administracije, kot oblaka kapljic, začetna hitrost in velikostna porazdelitev kapljic [3, 5]. Zaradi razgibane geometrije nosne votline lahko že majhna sprememba začetne smeri curka povzroči veliko spremembo regionalne depozicije [7, 8].

Glavni cilj raziskave je numerično opisati aplikacijo pršilke in oceniti, kateri parametri najbolj vplivajo na masne deleže depozicije po posameznih segmentih nosu. Posebej nas zanima segment 2, ki predstavlja olfaktorno območje v zgornjem delu nosne votline. To območje je za dostavo zahtevno, ker neposredna pot iz nosnice ni ravna, tok in kapljice pa se že v sprednjem delu srečajo z zožitvami in nosnimi školjkami.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Fakulteta za Farmacijo, Univerza v Ljubljani

³ Sandoz razvojni center Slovenija



Slika 1: Sekcionirani model nosne votline. Segment 1 predstavlja nosni vestibul, segment 2 olfaktorno območje, segmenta 3 in 4 območji srednje in spodnje nosne školjke, segment 5 pa nasofarinks. Barve označujejo segmente, po katerih se kasneje seštevajo depozicije kapljic.

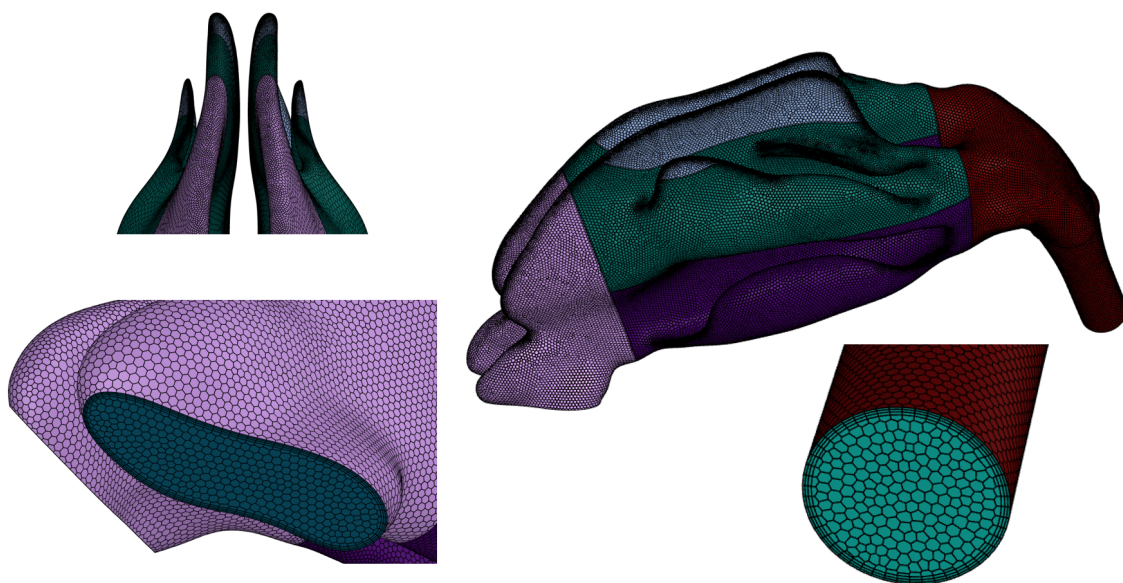
Računalniška dinamika tekočin (CFD) v tem delu ni nadomestilo za eksperiment, temveč njegovo dopolnilo. Eksperiment poda končno količino odložene tekočine po segmentih, simulacija pa omogoči vpogled v trajektorije kapljic, lokalni tok zraka in mehanizme nastale porazdelitve. Podrobna eksperimentalna karakterizacija pršilk, priprava 3D tiskanih nosnih modelov in obsežni parametrični izračuni so opisani v internem poročilu inhalatorji LEK-FSUM [6]. Sekcionirani model nosne votline in njegova uporaba za in-vitro študije depozicije sta opisana tudi v [9].

2 Geometrija in meritve

Za osnovni primer je bila uporabljena povprečna geometrija zdrave nosne votline, slika 1. Model izhaja iz statističnega modela oblike, ki je bil zgrajen na osnovi CT podatkov 25 oseb brez simptomov motenega nosnega dihanja [2]. Takšna geometrija ni nadomestilo za populacijsko študijo, je pa uporabna kot dobro definiran referenčni primer za primerjavo numeričnih in eksperimentalnih rezultatov.

Geometrija je bila pripravljena tako, da jo je mogoče uporabiti kot CFD domeno in kot sekcionirani fizični model za merjenje depozicije. Delitev na segmente je zato enaka v simulaciji in meritvah, kar omogoča neposredno primerjavo relativnih masnih deležev. Tak pristop zmanjša dvoumnost pri interpretaciji rezultatov: lokalna numerična polja se lahko seštevajo po istih anatomskih območjih, v katerih je merjena odložena masa.

Eksperimentalno so bile določene tudi lastnosti pršilnega curka. Uporabljena sta bila dva vira podatkov: standardizirani sistem Sprayview, ki dobro opiše stabilni del pršenja, in Oxford Laser VisiSizer, ki zajame celoten ročno sprožen aktivacijski cikel. Razlika je pomembna, ker začetna in končna faza pršenja pogosto vsebujeta večje kapljice z večjo vztrajnostjo. Poročilo [6] navaja, da so bile pri meritvah VisiSizer na 30 mm od šobe Sauterjeve srednje vrednosti premera približno $80,2 \mu\text{m}$ za V01, $68,0 \mu\text{m}$ za V03, $63,8 \mu\text{m}$ za V04, $71,5 \mu\text{m}$ za V05 in $62,9 \mu\text{m}$ za pršilko za enkratno uporabo. Povprečne hitrosti kapljic so bile od 6,2 do 12,2 m/s, koti oblaka pa od približno 52° do 75° . Podobne omejitve pri prenosu in-vitro karakterizacije pršilk v napovedi



Slika 2: Detajli računske mreže v sekcioniranem modelu nosne votline. Mreža je sestavljena iz približno milijona poliedričnih celic in je zgoščena ob stenah, kjer so gradienti hitrosti največji.

nosne depozicije so bile obravnavane tudi v [10].

3 Numerični model

3.1 Tok zraka

Najprej je bil izračunan ustaljen tok zraka skozi nosno votlino. Pri pretoku 20 l/min, ki ustreza mirnemu dihanju, je Reynoldsovo število lokalno v območju približno 500–2500. Zaradi zapletene geometrije nosu in različnih lokalnih karakterističnih dolžin je tak tok lahko laminaren, prehodni ali lokalno turbulenten [4]. Zato je bila preverjena občutljivost rezultatov na režim toka in gostoto mreže, rezultate pa smo primerjali z referenčnimi vrednostmi za povprečno geometrijo [2].

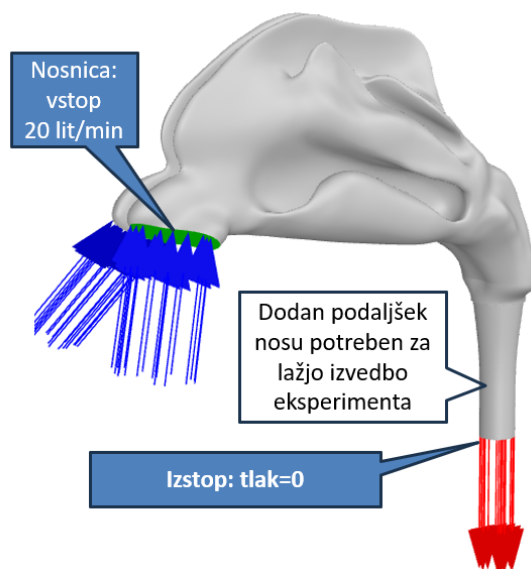
Tok zraka modeliramo z Navier-Stokesovimi enačbami, ki so reševane s pomočjo metode končnih volumnov v programu Ansys Fluent. Za nestisljiv laminarni tok veljata kontinuitetna in gibalna enačba

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad (2)$$

kjer je $\mathbf{u}$ hitrostno polje, p tlak, ρ gostota zraka, μ dinamična viskoznost in $\mathbf{g}$ težnostni pospešek. Pri ustaljenem izračunu je časovni odvod $\partial \mathbf{u} / \partial t$ enak nič. Na vходу je bil predpisan robni pogoj z znanim pretokom, na izhodu pa pogoj konstantnega tlaka. Na stenah je bil predpisan pogoj brez zdrsa; uporabljeni robni pogoji so povzeti na sliki 3.

Turbulenca je bila modelirana z uporabo Reynoldsovih povprečnih Navier-Stokesovih enačb (RANS) in modela GEKO, ki je bil razvit za simulacijo prehodnega režima toka [1]. Model GEKO je bil



Slika 3: Robni pogoji za simulacijo ustaljenega vdih.

uporabljen tudi v referenčni študiji [2], kar omogoča neposredno primerjavo rezultatov. Za preverjanje občutljivosti na gostoto mreže smo izvedli izračune z grobo in fino mrežo, pri čemer je bila fina mreža približno dvakrat gostejša od grobe.

Nosna votlina je bila diskretizirana s tremi poliedričnimi mrežami: 3.4, 7.5 in 17 milijoni vozlišč, prikazano na sliki 2. Mreža je bila zgoščena v ozkih prehodih in ob stenah. Uporabljen je bil turbulentni model GEKO. Kot značilen primer je bil analiziran ustaljen vdih 20 l/min, pri primerjavah z meritvami brez aktivnega vdih pa tudi pretok 0,5 l/min. Slednji približno predstavlja zračni impulz, ki spremlja mehansko aktivacijo pršilke.

Primerjava z referenčnimi vrednostmi za padec tlaka, hidravlični upor, hitrosti in strižne napetosti, prikazana na sliki 4, je pokazala dobro ujemanje globalnih veličin. Izračunani padec tlaka je bil približno 3,5 Pa, referenčna vrednost pa približno 3,1 Pa [6, 2]. Približno 10 % večji izračunani padec tlaka pripisujemo predvsem dodatnemu podaljšku na izstopu iz nosu, ki ga v referenčni geometriji ni bilo.

3.2 Modeliranje pršilke

ANSYS Discrete Phase Model (DPM) modelira kapljice kot diskretne faze v kontinuirnem fluidu z Lagrangevim pristopom. Osnovne enačbe za sledenje delcem vključujejo:

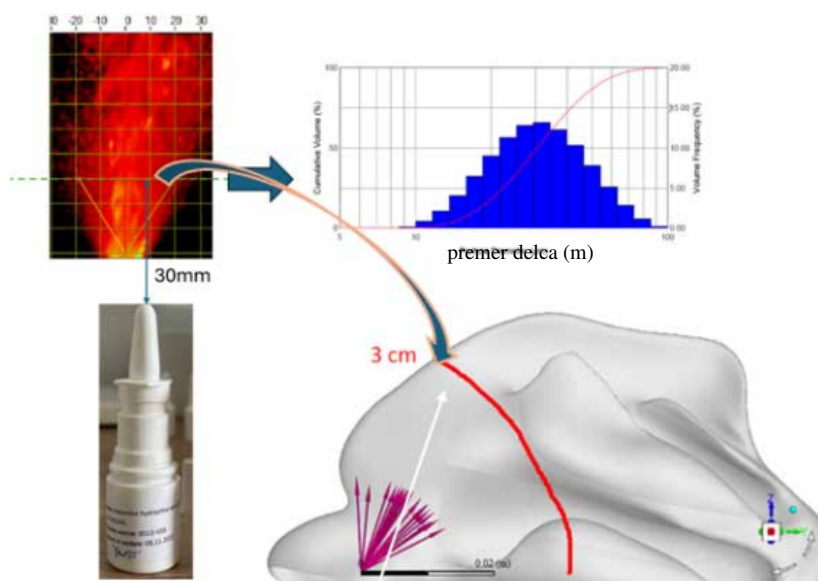
$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p, \quad (3)$$

$$\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \frac{18\mu}{\rho_p d_p^2} \frac{C_D Re}{24} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + \mathbf{g}, \quad (4)$$

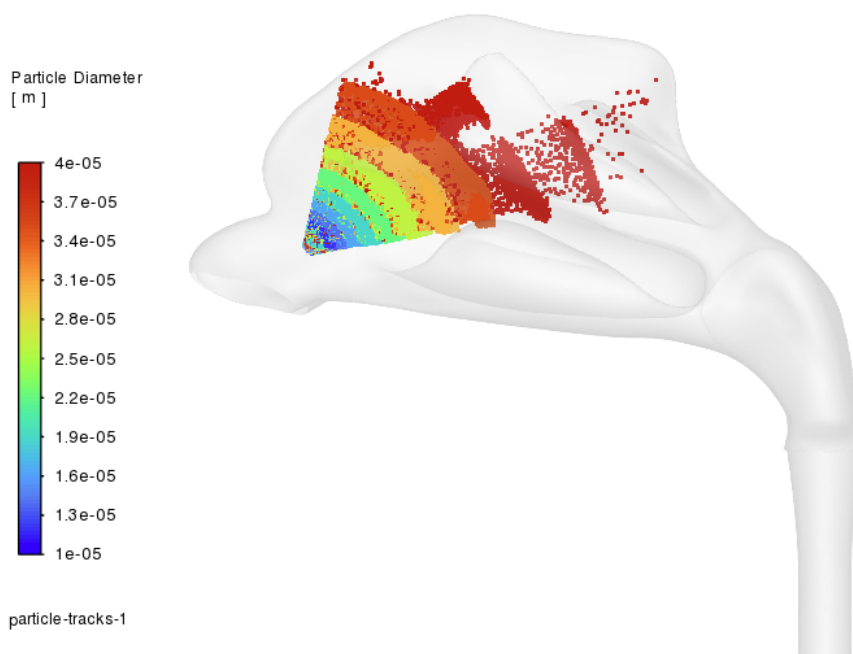
kjer je $\mathbf{x}_p$ pozicija delca, $\mathbf{u}_p$ hitrost delca, $\mathbf{u}$ hitrost fluida, ρ_p gostota delca, d_p premer delca, C_D koeficient upora in Re Reynoldsovo število.

computation	dp	R	WSS		velocities	
			avg	max	avg	max
	[Pa]	[Pa·s/ml]	[Pa]	[Pa]	[m/s]	[m/s]
Turbulent						
coarse 3.4M	3.46	0.0173	0.0307	0.495	0.736	2.56
medium 7.5M	3.53	0.0176	0.0317	0.723	0.736	2.58
fine 17M	3.54	0.0177	0.0319	1.059	0.734	2.59
Laminar						
coarse 3.4M	3.46	0.0173	0.0307	0.501	0.737	2.58
medium 7.5M	3.52	0.0176	0.0317	0.771	0.736	2.60
fine 17M	3.54	0.0177	0.0319	1.131	0.736	2.61
Reference	3.1	0.016	0.034	0.176	0.73	2.06

Slika 4: Primerjava izračunanega padca tlaka, normaliziranega hidravličnega upora $R = \Delta p / Q$ in strižnih napetosti z referenčnimi rezultati [2]. Prikazana je občutljivost na gostoto računske mreže in na izbiro laminarnega oziroma turbulentnega režima toka.



Slika 5: Prenos eksperimentalne karakterizacije pršilke v CFD robni pogoji. Meritve prostega curka pri 30 mm od šobe je treba uporabiti previdno, ker se v nosu oblak razvija v omejenem prostoru.



Slika 6: Trajektorije kapljic v nosni votlini. Barva označuje premer kapljic.

Namesto neposrednega reševanja razpada curka v šobi je pršilka v model vnesena kot robni pogoj z znano hitrostjo kapljic, velikostno porazdelitvijo, masnim pretokom, kotom oblaka in smerjo administracije, kot je shematično prikazano na sliki 5. Tak pristop je računsko izvedljiv in pogosto uporabljen pri numeričnih študijah depozicije nosnih pršilk [7, 8].

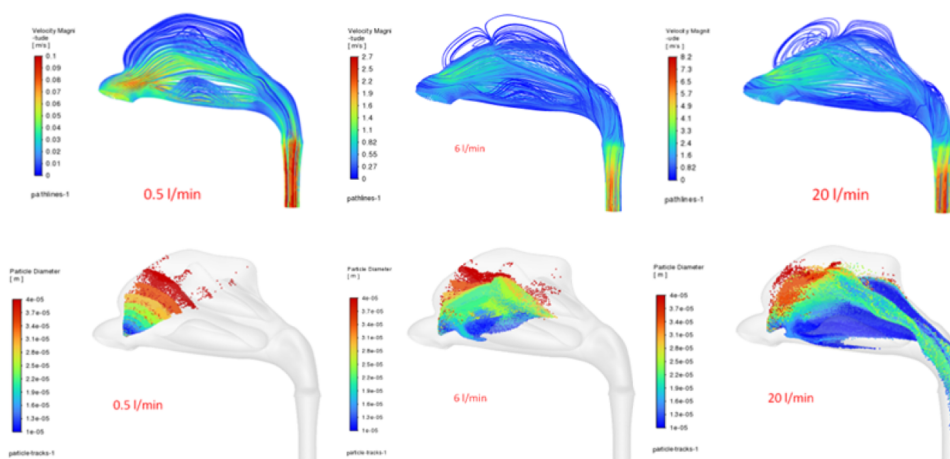
Pri sledenju delcev so upoštevani aerodinamični upor, gravitacija in turbulentna disperzija. Zaradi impulza pršilnega curka je bil uporabljen dvosmerno sklopljen izračun med zrakom in delci. Na stenah je bil predpisan pogoj ujetja: kapljica se po trku s steno šteje kot deponirana. Eulerjev film je omogočil seštevanje odložene mase po segmentih. Ponovno odnašanje ali odtekanje tekočine po steni ni bilo modelirano, kar je pomembna poenostavitev pri primerjavi z meritvami.

4 Rezultati

4.1 Osnovni mehanizem depozicije

Značilni rezultat simulacije je prikazan na sliki 6. Večje kapljice zaradi večje vztrajnosti pogosteje zadenejo sprednje stene nosne votline. Manjše kapljice hitreje sledijo zračnemu toku, vendar jih geometrija še vedno ne vodi nujno v olfaktorno območje. Zato manjša velikost kapljic sama po sebi ne zagotavlja večje dostave v segment 2.

V okviru parametrične študije so bili analizirani najpomembnejši vplivni parametri: vrsta pršilke, položaj šobe, kot administracije, hitrost vdiha, hitrost curka, velikost kapljic, nagib glave, temperatura in vlažnost ter geometrija nosu. Vsi našteti parametri lahko vplivajo na regionalno depozicijo, vendar ne delujejo neodvisno. Na primer, večje kapljice imajo večjo vztrajnost in lažje ohranijo



Slika 7: Vpliv hitrosti vdiha na potek tokovnic zraka in depozicijo kapljic. Barve tokovnic predstavljajo hitrosti, barve kapljic pa njihov premer. Močnejši vdih povleče male kapljice globlje v nos in naprej v pljuča. Vendar lahko povečan vdih tudi poveča udarce kapljic v sprednje stene, kar ne pomeni nujno boljše dostave v olfaktorno območje.

začetno smer, hkrati pa hitreje trčijo v sprednje stene, če je usmerjenost pršilke neugodna.

V pričujočem članku je kot osrednji primer prikazan vpliv hitrosti vdiha, ki je bil izpostavljen tudi v poročilu [6]. Slika 7 prikazuje tokovnice zraka in depozicijo kapljic pri različnih pretokih. Pri 0,5 l/min so trajektorije kapljic izrazito določene z začetno smerjo curka. Pri 6 l/min manjše kapljice že močnejše sledijo toku, pri 20 l/min pa lahko močnejši vdih poveča udarce kapljic v sprednje stene in zato ne pomeni nujno boljše dostave v segment 2.

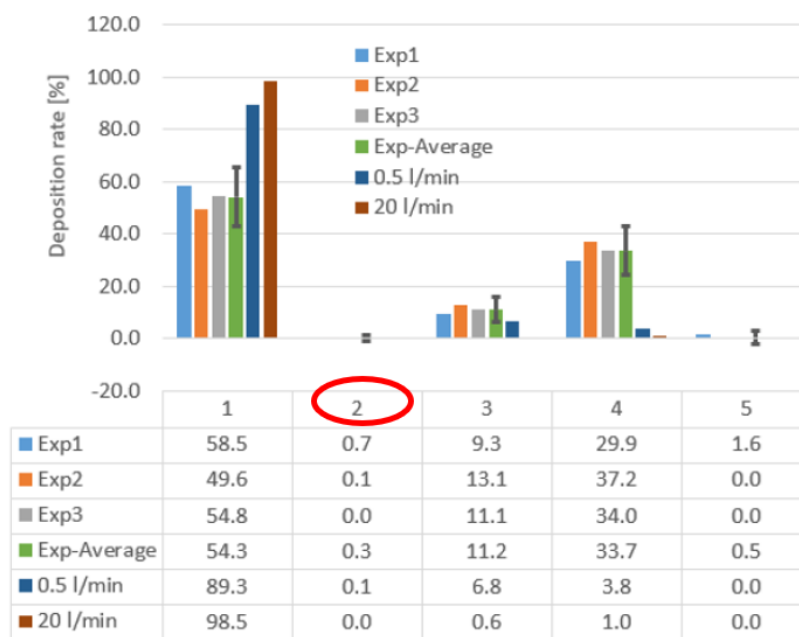
4.2 Primerjava z meritvami

Za primerjavo z eksperimentom so bili uporabljeni relativni masni deleži po segmentih, prikazani na sliki 8. Takšna primerjava je primernejša od neposredne primerjave absolutne mase, saj eksperiment zajame celoten aktivacijski cikel pršilke, numerični model pa uporablja predpisan robni pogoj za kapljice.

Največje razlike med simulacijo in meritvami se pojavijo pri segmentu 1. CFD lahko napove zelo velik delež ujetja kapljic v sprednjem delu, predvsem kadar je curek usmerjen proti zožitvi takoj za nosnico. V eksperimentu se lahko del tekočine po odlaganju prerazporedi v nižje ležeče segmente, predvsem v segment 4, česar model s pogojem ujetja ne zajame. Kljub temu simulacija pravilno opiše glavno fizikalno sliko: olfaktorno območje je pri obravnavani geometriji težko dosegljivo, sprememba hitrosti vdiha pa sama po sebi ne povzroči bistvenega izboljšanja depozicije v segmentu 2.

5 Zaključki in omejitve

Predstavili smo numerično analizo pršilke za nos, ki povezuje validiran CFD model toka zraka, diskretni fazni model kapljic in primerjavo z meritvami v sekcioniranem nosnem modelu. Re-



Slika 8: Primerjava eksperimentalne in numerične depozicije po segmentih za izbrane pretoke vdiha.

zultati kažejo, da numerična simulacija omogoča pomemben vpogled v dogajanje v nosni votlini, vendar ne vodi do enega samega univerzalnega pravila. Položaj šobe, kot administracije, kot oblaka, velikost kapljic, hitrost vdiha in geometrija nosu delujejo hkrati.

Model ima več omejitev. Razpad curka v šobi ni rešen neposredno, ampak je nadomeščen z vhodno porazdelitvijo kapljic. Meritve pršilke so izvedene v prostem curku, realna aplikacija pa poteka v omejenem prostoru nosnice. Poleg tega model predpostavi, da se kapljica po dotiku s steno ujame, medtem ko se v eksperimentu tekočina lahko prerazporedi po površini. Te omejitve pojasnijo del razlik med absolutnimi vrednostmi, ne spremenijo pa glavnih trendov.

Posebej pomemben je vpliv geometrije. V internem poročilu je bil poleg SSM modela analiziran tudi komercialno dostopni nosni model (CANM). Zaradi bolj odprte notranje poti je bil padec tlaka pri 0,5 l/min približno 62 % vrednosti pri SSM modelu, depozicija v olfaktornem območju pa je bila pri primerljivem primeru približno 70-krat večja [6]. Takšna razlika pokaže, da rezultatov ene geometrije ne smemo neposredno posplošiti na vse uporabnike. Za robustno optimizacijo bo potrebna zbirka nosnih geometrij in preiščljeno izbrani validacijski poskusi.

Literatura

- [1] Ansys, Inc. *Ansys Fluent Theory Guide*. Ansys, Inc., Canonsburg, PA, USA, 2026. Release 2026 R1.
- [2] Jan Brüning, Thomas Hildebrandt, Werner Heppt, Nora Schmidt, Hans Lamecker, Angelika Szensgel, Natalja Amiridze, Heiko Ramm, Matthias Bindernagel, Stefan Zachow, and Leonid Goubergrits. Characterization of the airflow within an average geometry of the healthy human nasal cavity. *Scientific Reports*, 10:3755, 2020. doi: 10.1038/s41598-020-60755-3.
- [3] Per Gisle Djupesland. Nasal drug delivery devices: characteristics and performance in a clinical perspective-a review. *Drug Delivery and Translational Research*, 3(1):42–62, 2013. doi: 10.1007/s13346-012-0108-9.
- [4] D. J. Doorly, D. J. Taylor, and R. C. Schroter. Mechanics of airflow in the human nasal airways. *Respiratory Physiology & Neurobiology*, 163(1–3):100–110, 2008. doi: 10.1016/j.resp.2008.07.027.
- [5] Mingyue Gao, Xin Shen, and Shirui Mao. Factors influencing drug deposition in the nasal cavity upon delivery via nasal sprays. *Journal of Pharmaceutical Investigation*, 50:251–259, 2020. doi: 10.1007/s40005-020-00482-z.
- [6] Matjaž Hriberšek, Jure Ravnik, Matej Zadavec, Timi Gomboc, Matjaž Ramšak, and Gregor Harih. Nasal spray modeling and deposition of droplets in the nasal cavity. Final report, University of Maribor, Faculty of Mechanical Engineering and Lek Pharmaceuticals d.d., 2025. Internal project report inhalatorjiLEK-FSUM, April 24, 2025.
- [7] K. Inthavong, Z. F. Tian, H. F. Li, J. Y. Tu, W. Yang, C. L. Xue, and C. G. Li. A numerical study of spray particle deposition in a human nasal cavity. *Aerosol Science and Technology*, 40(11):1034–1045, 2006. doi: 10.1080/02786820600924978.
- [8] Julia S. Kimbell, Rebecca A. Segal, Bahman Asgharian, Brian A. Wong, Jeffry D. Schroeter, Jeremy P. Southall, Colin J. Dickens, Geoff Brace, and Frederick J. Miller. Characterization of deposition from nasal spray devices using a computational fluid dynamics model of the human nasal passages. *Journal of Aerosol Medicine*, 20(1):59–74, 2007. doi: 10.1089/jam.2006.0531.
- [9] Anže Ličen, Jernej Grmaš, Špela Pelcar, Jurij Trontelj, Timi Gomboc, Matjaž Hriberšek, and Gregor Harih. Development, fabrication and application of a sectioned 3d-printed human

nasal cavity model for in vitro nasal spray deposition studies. *Biomedicines*, 14(2):329, 2026. doi: 10.3390/biomedicines14020329.

- [10] Julie D. Suman, Beth L. Laube, and Richard Dalby. Validity of in vitro tests on aqueous spray pumps as surrogates for nasal deposition, absorption, and biologic response. *Journal of Aerosol Medicine: Deposition, Clearance, and Effects in the Lung*, 19(4):510–521, 2006. doi: 10.1089/jam.2006.19.510.



Eksperimentalno podprto elektromagnetno-toplotno modeliranje segrevanja glave pri uporabi brezžičnih ušesnih slušalk

Ivan Dominik Horvat¹, Klementina Vidjak², Jana Wedel^{1,3}, Jurij Iljaž¹, Blaž Kamenik¹, Dragan Poljak², Jure Ravnik¹

Experimentally supported electromagnetic–thermal modeling of head heating during wireless earbud use

Povzetek. Brezžične ušesne slušalke so med uporabo nameščene neposredno ob človeško tkivo, zato lahko povzročijo lokalno povišanje temperature zaradi absorpcije elektromagnetne energije in lastnega segrevanja naprave. V prispevku predstavljamo eksperimentalno podprt računski pristop za napoved segrevanja glave, ki lastno segrevanje naprave in segrevanje zaradi absorpcije elektromagnetne energije obravnava v sklopljenem elektromagnetno-toplotnem modelu. Segrevanje naprave določimo z infrardečo termografijo na fantomu ušesa, ki posnema lastnosti tkiva, izmerjeni temperaturni odziv pa uporabimo za identifikacijo efektivnega toplotnega vira v območju elektronike. Elektromagnetno obremenitev določimo z numerično simulacijo poenostavljene zankaste antene ob realističnem modelu ušesa, pri čemer porazdelitev stopnje specifične absorpcije (SAR, angl. *specific absorption rate*) vključimo v Pennesov model prenosa toplote v anatomsko realistični glavi kot volumski vir toplote. Toplotni odziv izračunamo z namenskim reševalnikom bioprenosa toplote, razvitim v okolju OpenFOAM. Rezultati kažejo, da sta elektromagnetno polje in absorpcija energije izrazito lokalizirana v bližini slušalke, medtem ko je temperaturno polje zaradi toplotne difuzije bolj zglajeno. Pri obravnavanih pogojih je skupno povišanje temperature majhno, glavni prispevek pa izhaja iz lastnega segrevanja naprave; elektromagnetno povzročeno segrevanje je bistveno manjše.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje

³ Lehrstuhl für Technische Mechanik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Abstract. Wireless earbuds are positioned directly next to human tissue during use and can therefore cause localized temperature elevation due to electromagnetic energy absorption and device self-heating. This paper presents an experimentally supported computational approach for predicting head heating that treats device self-heating and heating due to electromagnetic energy absorption within a coupled electromagnetic–thermal model. Device self-heating is characterized using infrared thermography on a tissue-mimicking ear phantom, and the measured thermal response is used to identify an effective heat source in the electronics region. Electromagnetic exposure is determined by numerical simulation of a simplified loop antenna positioned near a realistic ear model, and the resulting specific absorption rate (SAR) distribution is incorporated into the Pennes heat-transfer model of an anatomically realistic head as a volumetric heat source. The thermal response is computed using a custom bioheat-transfer solver developed in OpenFOAM. The results show that the electromagnetic field and energy absorption are strongly localized near the earbud, whereas the temperature field is smoother due to thermal diffusion. Under the considered operating conditions, the overall temperature increase is small and dominated by device self-heating; electromagnetic-induced heating is considerably smaller.

1 Uvod

Brezžične ušesne slušalke so med uporabo nameščene neposredno v ušesu oziroma ob ušesnem tkivu, zato predstavljajo značilen primer brezžične naprave v neposredni bližini človeškega telesa. Pri takšni uporabi sta pomembna lokalna elektromagnetna obremenitev in z njo povezan toplotni odziv tkiva, zlasti ker lahko naprava deluje daljši čas in je delno obdana z anatomskimi strukturami ušesa [14, 21, 15].

Pri radiofrekvenčnih elektromagnetnih poljih je osnovni mehanizem interakcije z biološkim tkivom absorpcija elektromagnetne energije, ki se v tkivu izrazi kot volumski vir toplote. V frekvenčnem območju od 100 kHz do 6 GHz se ta absorpcija običajno vrednoti s stopnjo specifične absorpcije, SAR [12]. Ker tehnologija Bluetooth deluje v pasu ISM približno med 2.4 GHz do 2.48 GHz, je SAR ustrezna veličina za opis elektromagnetne absorpcije pri obravnavani napravi [4, 18]. Porazdelitev SAR pa sama po sebi še ne določa temperaturnega odziva, saj je ta odvisen tudi od toplotnih lastnosti tkiva, geometrije, robnih pogojev in fizioloških mehanizmov, predvsem prekrvavitve [19, 8].

Pri brezžičnih ušesnih slušalkah segrevanje ni nujno posledica samo absorpcije elektromagnetne energije. Pomemben prispevek lahko predstavlja tudi lastno segrevanje naprave zaradi disipacije moči v elektronskih komponentah, bateriji in ohišju [2, 3, 25]. Ker je ta vir toplote nameščen neposredno ob tkivu, ga je treba obravnavati skupaj z elektromagnetno povzročenim segrevanjem, kar omogoča ločeno oceno prispevkov posameznih mehanizmov k skupnemu povišanju temperature.

V prispevku je predstavljen eksperimentalno podprt računski pristop za napoved segrevanja glave pri uporabi brezžične ušesne slušalke. Elektromagnetni del temelji na numerični simulaciji antene v bližini realističnega modela ušesa, pri čemer se porazdelitev SAR uporabi kot volumski vir toplote v anatomsko realističnem modelu glave. Lastno segrevanje slušalke je določeno z infrardečo termografijo na fantomu ušesa, ki posnema lastnosti tkiva, in z inverzno identifikacijo efektivnega toplotnega vira v območju elektronike. Pristop povezuje elektroma-

gnetno simulacijo, eksperimentalno kalibracijo in računsko analizo temperaturnega odziva z namenskim reševalnikom bioprenosa toplote, razvitim v okolju OpenFOAM [5, 17], ter omogoča neposredno primerjavo segrevanja zaradi elektromagnetne absorpcije in disipacije toplote v sami napravi.

2 Metodologija

Uporabljeni pristop združuje elektromagnetno simulacijo, eksperimentalno kalibracijo in toplotni izračun. Iz porazdelitve električnega polja v območju ušesa se določi SAR, ki se v toplotnem modelu uporabi kot prostorsko odvisen volumski vir toplote. Lastno segrevanje slušalke je določeno ločeno z infrardečo termografijo na fantomu ušesa, ki posnema lastnosti tkiva, izmerjeni temperaturni odziv pa se uporabi za inverzno določitev efektivnega vira toplote v območju elektronike. Oba vira toplote sta nato vključena v model prenosa toplote v anatomsko realistični glavi. Elektromagnetne simulacije so bile izvedene v okolju CST Studio Suite, temperaturno polje pa z namenskim reševalnikom bioprenosa toplote, razvitim v okolju OpenFOAM [5, 17].

2.1 Elektromagnetni model in določitev SAR

Elektromagnetni model je bil uporabljen za izračun porazdelitve električnega polja v območju ušesa in pripadajoče porazdelitve SAR. Lokalna vrednost SAR je za harmonično elektromagnetno polje zapisana kot [20, 12]:

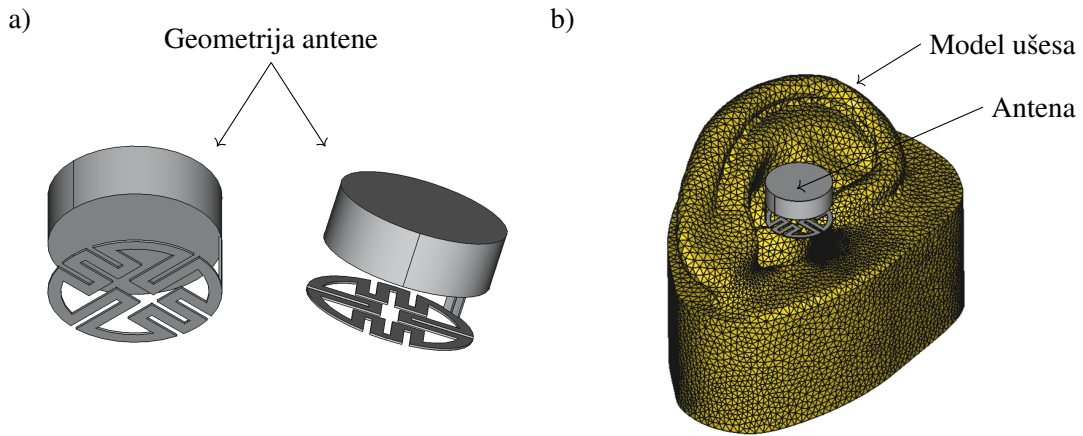
$$\text{SAR} = \frac{dP}{dm} = \frac{\frac{1}{2}\sigma|\vec{E}|^2 dV}{\rho dV} = \frac{\sigma|\vec{E}|^2}{2\rho}, \quad (1)$$

kjer je σ električna prevodnost tkiva, ρ gostota tkiva, $|\vec{E}|$ pa amplituda električnega polja. Izračunana lokalna porazdelitev SAR je bila nato uporabljena kot prostorsko odvisen vir toplote zaradi elektromagnetne absorpcije.

Model je bil sestavljen iz realistične geometrije zunanjega ušesa in poenostavljene zankaste antene, kot je prikazano na sliki 1. Antena predstavlja poenostavljen model antene v brezžični ušesni slušalki, takšna oblika pa je značilna za majhne Bluetooth naprave [24]. Zasnovana je bila za območje Bluetooth, približno 2.45 GHz [18], zaradi bližine izgubnega tkiva pa je bila porazdelitev električnega polja ovrednotena pri približno 2.3 GHz. Tkivo ušesa je bilo obravnavano kot homogeno izgubno dielektrično sredstvo z lastnostmi kože pri 2.45 GHz: $\epsilon_r = 38$, $\sigma = 1.46 \text{ S m}^{-1}$ in $\rho = 1109 \text{ kg m}^{-3}$ [13].

Elektromagnetne simulacije so bile izvedene v okolju CST Studio Suite s časovnim reševalnikom na osnovi metode končnih integracij [5]. Antena je bila vzbujena z vhodno močjo 10 mW, kar ustreza tipični zgornji vrednosti oddajne moči naprav Bluetooth [18]. Poleg lokalne SAR sta bili za dozimetrično primerjavo ovrednoteni tudi povprečni vrednosti na 1 g in 10 g tkiva, pri čemer je za lokalno izpostavljenost v tem frekvenčnem območju najpomembnejše povprečenje na 10 g [12, 11].

Antenski odziv je bil najprej ovrednoten v frekvenčnem območju od 0 do 5 GHz z 1001 frekvenčno točko, za nadaljnjo toplotno analizo pa je bila uporabljena porazdelitev električnega polja pri približno 2.3 GHz. Računska domena je bila diskretizirana s heksaedrsko mrežo z



Slika 1: Elektromagnetni model za analizo izpostavljenosti pri uporabi brezžične ušesne slušalke: (a) geometrija poenostavljene zankaste antene; (b) položaj antene glede na model ušesa.

lokalno zgostitvijo v območjih večjih gradientov elektromagnetnega polja, predvsem v bližini antene in na stiku med ušesom in zrakom. Antena je bila v elektromagnetnem modelu obravnavana kot popoln električni prevodnik in vzbujena z diskretnim vhodom. Osnova modela ušesa je bila podaljšana na približno 32 mm, s čimer je bil zmanjšan vpliv umetnih odbojev od odrezane meje modela.

2.2 Toplotni model in eksperimentalna kalibracija

Toplotni odziv glave je bil izračunan s Pennesovim modelom prenosa toplote, ki vključuje prenos toplote, prekrvavitev, presnovno toploto in dodatne volumnske vire [19]. V model sta vključena elektromagnetni vir $\rho \text{ SAR}$ in vir lastnega segrevanja slušalke q_{ext} . Uporabljena enačba je bila [19]:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [k \nabla T] + \rho_b c_{p,b} w_b [T_a - T] + q_m + \rho \text{ SAR} + q_{\text{ext}}. \quad (2)$$

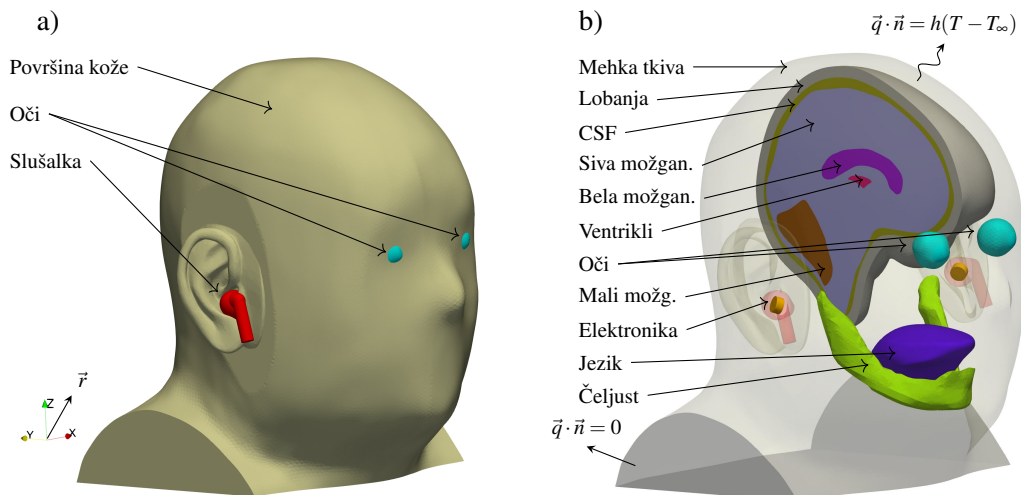
Pri tem so ρ , c_p in k gostota, specifična toplota in toplotna prevodnost tkiva, ρ_b , $c_{p,b}$ in w_b opisujejo kri in prekrvavitev, T_a arterijsko temperaturo, q_m pa presnovno toploto.

Enačba (2) je zapisana v danes uveljavljeni generični obliki Pennesovega biotoplotnega modela, ki izhaja iz izvirnega dela [19]. Čeprav je bil model prvotno razvit na podlagi meritev na podlakti, se njegova oblika pogosto uporablja tudi za druga prekrvavljena tkiva, pri čemer se razlike med tkivi upoštevajo prek tkivno specifičnih parametrov w_b , k , ρ in c_p . Člen s T_a predstavlja izmenjavo toplote zaradi prekrvavitve med arterijsko krvjo in lokalnim tkivom, medtem ko q_m opisuje presnovno toploto. V anatomskem modelu glave so bili perfuzijski in metabolični parametri uporabljeni v tkivih, za katere so bili podatki podani v podatkovni zbirki IT'IS [13]; v neprekravljenih območjih ti prispevki niso bili upoštevani.

Računsko območje je temeljilo na anatomsko realističnem tridimenzionalnem modelu glave z vstavljenjo slušalko, kot je prikazano na sliki 2 [16]. Model vključuje več tkivnih območij, med

drugim mehka tkiva, lobanjo, cerebrospinalno tekočino, sivo in belo možganovino, ventrikle, oči, male možgane, jezik in čeljust. Lastnosti tkiv so bile povzete iz podatkovne zbirke IT'IS [13]. Slušalka je bila modelirana kot trdno telo v območju ušesnega kanala, njeno notranje segrevanje pa z efektivnim virom q_{ext} v območju elektronike.

Na zunanjih površinah je bil uporabljen konvektivni robni pogoj $\vec{q} \cdot \vec{n} = h(T - T_{\infty})$, z efektivnim koeficientom $h = 7.7 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ [6, 1]. Temperatura okolice je bila $T_{\infty} = 20^{\circ}\text{C}$, arterijska temperatura pa $T_a = 37^{\circ}\text{C}$ [10]. Na odrezani spodnji meji modela je bil uporabljen adiabaten robni pogoj, med sosednjimi območji pa popoln toplotni stik.



Slika 2: Toplotni model anatomsko realistične glave [16]: (a) geometrija modela z vstavljenjo slušalko; (b) notranje strukture in robni pogoji.

Lastno segrevanje slušalk je bilo določeno z infrardečo termografijo na fantomu ušesa iz baliistične želatine, ki posnema lastnosti tkiva [23]. Meritev je bila izvedena s kamero FLIR A655sc; slušalka je delovala 60 min v načinu predvajanja, nato pa je sledilo 80 min pasivnega ohlajanja [7]. Temperaturni dvig je bil določen glede na referenčno območje okolice:

$$\Delta T(t) = T_{\text{slusalka}}(t) - T_{\text{okolica}}(t). \quad (3)$$

Izmerjeni potek $\Delta T(t)$ je bil uporabljen za inverzno identifikacijo efektivnega vira toplote q_{ext} , koeficienta prenosa toplote h in efektivne toplotne kapacitete slušalk. Parametri so bili določeni z omejeno nelinearno metodo najmanjših kvadratov v okolju SciPy [22]. Pri inverzni identifikaciji na baliistični želatini je bil uporabljen poenostavljen toplotni model brez perfuzijskega člena in brez metaboličnega vira, saj fantom ne vsebuje fiziološke prekrvavitve ali presnove. V tem delu modela so bili zato upoštevani prevod toplote, konvekcija na površini ter efektivni vir toplote q_{ext} v območju elektronike. Identificirani vir q_{ext} in porazdelitev SAR sta bila nato uporabljena v stacionarnem izračunu temperaturnega polja z namenskim reševalnikom bioprenosa toplote, razvitim v okolju OpenFOAM [17, 9].

Toplotni izračuni so bili izvedeni v stacionarnem režimu. Računska mreža anatomskega modela glave je obsegala približno 2.14 milijona volumskih celic. Za reševanje je bil uporabljen

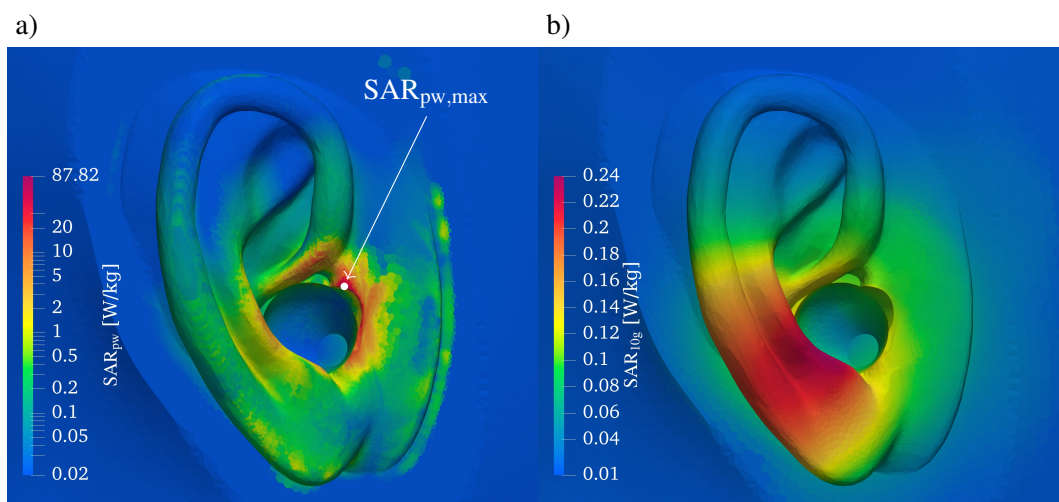
iterativni postopek do konvergence temperaturnega polja, pri čemer je bil kriterij konvergence določen z ostankih temperature pod 10^{-8} . Posamezen stacionarni izračun je na uporabljeni delovni postaji trajal približno 228 s.

3 Rezultati in razprava

3.1 Porazdelitev elektromagnetnega polja in SAR

Elektromagnetna simulacija je pokazala izrazito lokalizirano porazdelitev absorbirane energije v območju ušesa. Največja vrednost električnega polja je bila dosežena v bližini odprtine ušesa in je znašala $|\vec{E}|_{\max} = 365.25 \text{ V m}^{-1}$. Ker je bilo tkivo v elektromagnetnem modelu obravnavano kot homogeno izgubno dielektrično sredstvo, se to območje ujema z največjo lokalno vrednostjo SAR, $\text{SAR}_{\text{pw,max}} = 87.8174 \text{ W kg}^{-1}$.

Porazdelitev SAR je prikazana na sliki 3. Lokalna vrednost SAR je močno koncentrirana v majhnem območju ob slušalki in je bila uporabljena kot volumski vir toplote v enačbi (2). Pri povprečenju na 10 g tkiva se lokalni vrhovi zmanjšajo, porazdelitev pa postane bolj zglajena, kar je pomembno za dozimetrično primerjavo z mejnimi vrednostmi lokalne izpostavljenosti [12, 11].



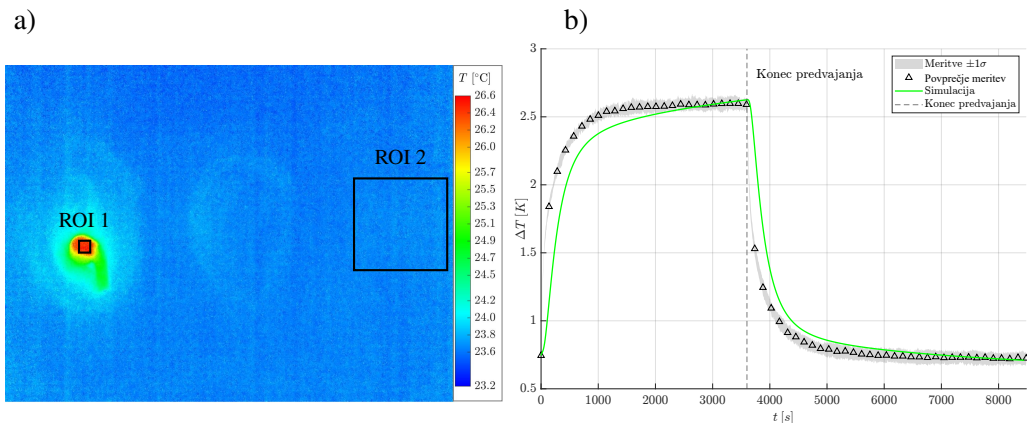
Slika 3: Porazdelitev SAR v območju ušesa: (a) lokalna vrednost SAR; (b) SAR, povprečen na 10 g tkiva.

3.2 Identifikacija toplotnega vira slušalke

Eksperimentalno izmerjeni temperaturni odziv slušalke je bil uporabljen za določitev efektivnega vira toplote v območju elektronike. Temperaturni dvig je bil določen iz dveh območij zanimanja (ROI): ROI 1 na območju slušalke in ROI 2 na referenčnem območju okolice, kot je prikazano na sliki 4(a). ROI 2 je bilo uporabljeno izključno kot referenčno območje za odštevanje vpliva temperature okolice oziroma počasnega temperaturnega drsenja med meritvijo. Pri

tem je bil uporabljen izraz $\Delta T(t) = T_{\text{ROI 1}}(t) - T_{\text{ROI 2}}(t)$. Med predvajanjem se je $\Delta T(t)$ povečal do približno 2.6 K, nato pa se je med pasivnim ohlajanjem zmanjševal. Primerjava izmerjenega odziva in umerjenega toplotnega modela je prikazana na sliki 4(b).

Z inverzno toplotno analizo je bil določen efektivni volumski vir toplote v območju elektronike $q_{\text{ext}} = 1.05 \times 10^5 \text{ W m}^{-3}$. Ocenjena sta bila tudi efektivni koeficient prenosa toplote $h = 5.67 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ in efektivna specifična toplota slušalke $c_p = 1054 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$. Identificirani vir q_{ext} je bil nato uporabljen v anatomskem modelu glave kot prispevek lastnega segrevanja naprave.



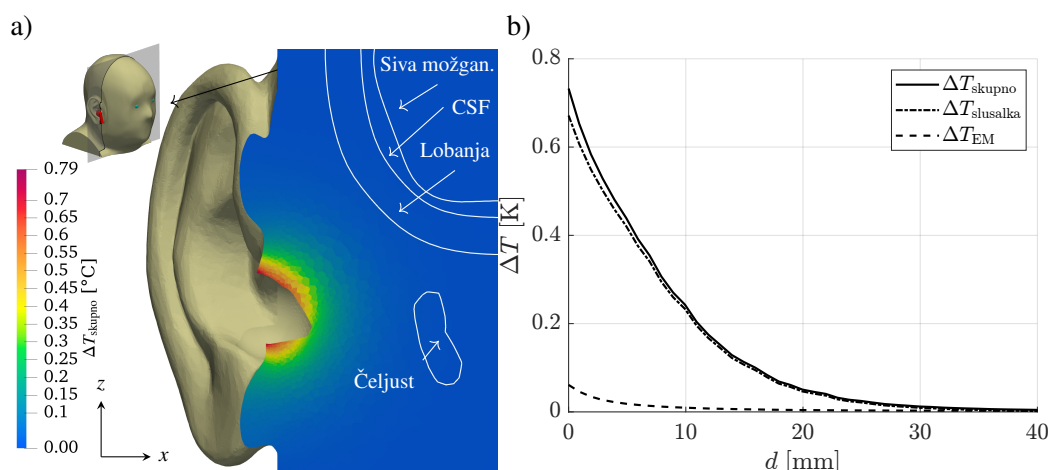
Slika 4: Identifikacija toplotnega vira slušalke: (a) infrardeči posnetek z označenima območjema ROI, pri čemer ROI 1 označuje območje slušalke, ROI 2 pa referenčno območje okolice; (b) primerjava izmerjenega temperaturnega dviga $\Delta T(t)$ in odziva umerjenega toplotnega modela.

3.3 Temperaturni odziv modela glave

Izračun temperaturnega polja v anatomskem modelu glave je pokazal, da je povišanje temperature omejeno predvsem na območje v neposredni bližini slušalke. Skupno temperaturno povišanje ΔT_{skupno} je v prerezu skozi območje največje lokalne vrednosti SAR prikazano na sliki 5(a), profil temperaturnega povišanja vzdolž iste smeri pa na sliki 5(b). Čeprav je porazdelitev SAR izrazito lokalizirana, je temperaturni odziv zaradi prevoda toplote in prekrvavitve bolj zglajen. Primerjava prispevkov kaže, da prevladuje lastno segrevanje slušalke, medtem ko je elektromagnetno povzročeno segrevanje bistveno manjše. Največje skupno povišanje temperature je ostalo manjše od 1 K. Takšno povišanje je s fiziološkega vidika majhno, vendar ga je treba interpretirati kot rezultat za obravnavano geometrijo, moč oddajanja in toplotne pogoje, ne pa kot splošno oceno vseh brezžičnih ušesnih slušalk.

4 Zaključki

V prispevku je bil predstavljen eksperimentalno podprt elektromagnetno-toplotni pristop za oceno segrevanja glave pri uporabi brezžične ušesne slušalke. Elektromagnetna simulacija je



Slika 5: Temperaturni odziv anatomskega modela glave: (a) prerez skozi območje največje lokalne vrednosti SAR s skupnim temperaturnim povišanjem ΔT_{skupno} ; (b) profil temperaturnega povišanja vzdolž iste smeri.

omogočila določitev lokalne porazdelitve SAR, lastno segrevanje slušalke pa je bilo določeno z infrardečo termografijo in inverzno toplotno analizo. Rezultati kažejo, da sta električno polje in SAR izrazito lokalizirana v neposredni bližini slušalke. Kljub lokalnim vrhom elektromagnetne absorpcije je bil njen vpliv na temperaturno polje majhen v primerjavi z lastnim segrevanjem naprave. Največji prispevek k povišanju temperature tako izhaja iz disipacije toplote v območju elektronike, medtem ko je elektromagnetno povzročeno segrevanje bistveno manjše. Predlagani pristop omogoča ločeno in skupno obravnavo obeh mehanizmov segrevanja ter predstavlja osnovo za nadaljnjo analizo toplotnega odziva nosljivih brezžičnih naprav v neposredni bližini človeškega telesa.

Zahvala

Avtorji se zahvaljujejo prof. Cavagnaro za plodne razprave in izvedbo simulacij. Zahvaljujejo se tudi Javni agenciji za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije za podporo v okviru projekta J7-60118 ter Hrvaški zakladi za znanost za podporo v okviru projekta IPS-2024-02-7779.

- [1] Z. Alali and S. Eckels. 3D Numerical Simulations of Mixed Convective Heat Transfer and Correlation Development for a Thermal Manikin Head. *Heliyon*, 10(9):e30161, May 2024.
- [2] J. Bauer, I. Górecki, M. Kohyt, A. Migasiewicz, and H. Podbielska. The influence of smartphones' operation modes on the superficial temperature distribution in the human auricle region. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 133(1):559–569, Jul 2018.
- [3] J. Bauer, C. O'Mahony, D. Chovan, J. Mulcahy, C. Silien, and S. A. Tofail. Thermal

- effects of mobile phones on human auricle region. *Journal of Thermal Biology*, 79:56–68, 2019.
- [4] Bluetooth Special Interest Group. *Bluetooth Core Specification Version 5.3*. Bluetooth SIG, 2021. Vol. 2, Part A, p. 390.
 - [5] Dassault Systèmes, Vélizy-Villacoublay, France. *CST Studio Suite*, 2025.
 - [6] R. J. De Dear, E. Arens, Z. Hui, and M. Oguro. Convective and Radiative Heat Transfer Coefficients for Individual Human Body Segments. *International Journal of Biometeorology*, 40(3):141–156, May 1997.
 - [7] FLIR. FLIR A655sc High-Resolution Science Grade LWIR Camera. Product webpage, 2025. Accessed: 2025-10-27.
 - [8] A. Hirata, S. Kodera, K. Sasaki, J. Gomez-Tames, I. Laakso, A. Wood, S. Watanabe, and K. R. Foster. Human exposure to radiofrequency energy above 6 GHz: review of computational dosimetry studies. *Physics in Medicine & Biology*, 66(8), 2021.
 - [9] I. D. Horvat and J. Iljaž. Numerical modeling of non-Fourier bioheat transfer in multilayer biological tissue using BEM to simulate dynamic thermography in skin tumor diagnostics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 179:106408, 2025.
 - [10] H. Hymczak, A. Golab, K. Mendrala, D. Plicner, T. Darocha, P. Podsiadlo, D. Hudziak, R. Gocol, and S. Kosinski. Core Temperature Measurement-Principles of Correct Measurement, Problems, and Complications. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 18(20):10606, 2021.
 - [11] IEEE. IEEE Standard for Safety Levels with Respect to Human Exposure to Electric, Magnetic, and Electromagnetic Fields, 0 Hz to 300 GHz. IEEE Std C95.1-2019, 2019.
 - [12] International Commission on Non-Ionizing Radiation Protection (ICNIRP). Guidelines for limiting exposure to electromagnetic fields (100 khz to 300 GHz). *Health Phys*, 118(5):483–524, May 2020.
 - [13] IT’IS Foundation. Tissue Properties Database V4.2, 2024.
 - [14] K. Karipidis, R. Mate, D. Urban, R. Tinker, and A. Wood. 5G mobile networks and health—a state-of-the-science review of the research into low-level RF fields above 6 GHz. *Journal of Exposure Science & Environmental Epidemiology*, 31(4):585–605, Jul 2021.
 - [15] S. Kim, Y. A. Sharif, and I. Nasim. Human electromagnetic field exposure in wearable communications systems: A review. *e-Prime - Advances in Electrical Engineering, Electronics and Energy*, 8:100508, 2024.
 - [16] G. M. Noetscher, J. Yanamadala, S. N. Makarov, and A. Pascual-Leone. Comparison of Cephalic and Extracranial Montages for Transcranial Direct Current Stimulation—A Numerical Study. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 61(9):2488–2498, Sept. 2014.

- [17] OpenCFD Ltd. OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox. <https://www.openfoam.com/>, 2025. Accessed: 2025-10-28.
- [18] J. Padgett, J. Bahr, M. Batra, L. Smithbey, L. Chen, and K. Scarfone. Guide to Bluetooth Security. Technical Report NIST Special Publication 800-121 Revision 2, National Institute of Standards and Technology, 2022.
- [19] H. H. Pennes. Analysis of Tissue and Arterial Blood Temperatures in the Resting Human Forearm. *Journal of Applied Physiology*, 1(2):93–122, Aug. 1948.
- [20] A. Razek. Assessment and Categorization of Biological Effects and Atypical Symptoms Owing to Exposure to RF Fields from Wireless Energy Devices. *Applied Sciences*, 13(3), 2023.
- [21] A. Verma, V. Kumar, and S. Gupta. Bio-effects of 5th generation electromagnetic waves on organs of human beings. *Global Health Journal*, 7(4):206–211, 2023.
- [22] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, M. Haberland, T. Reddy, D. Cournapeau, E. Burovski, P. Peterson, W. Weckesser, J. Bright, S. J. van der Walt, M. Brett, J. Wilson, K. J. Millman, N. Mayorov, A. R. J. Nelson, E. Jones, R. Kern, E. Larson, C. J. Carey, I. Polat, Y. Feng, E. W. Moore, J. VanderPlas, D. Laxalde, J. Perktold, R. Cimrman, I. Henriksen, E. A. Quintero, C. R. Harris, A. M. Archibald, A. H. Ribeiro, F. Pedregosa, and P. van Mulbregt. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020.
- [23] J. Winter and C. Shifler. The material properties of gelatin gels. BRL Contract Report No. 217 AD-A008396, U.S. Army Ballistic Research Laboratories, 1975.
- [24] T. H. Woo and Y. Joong Yoon. Bent loop Inverted F antenna for TWS Bluetooth earphones. In *2020 International Symposium on Antennas and Propagation (ISAP)*, pages 319–320, 2021.
- [25] J. Yun, Y. J. Yoo, H. R. Kim, and Y. M. Song. Recent progress in thermal management for flexible/wearable devices. *Soft Science*, 3(2), 2023.



Ocena hitrosti poškodbe v dinamskem sistemu s kontaktno nelinearnostjo na podlagi frekvenčnih prenosnih funkcij s pomočjo 1D konvolucijske nevronske mreže

Tim Mušič¹, Martin Česnik¹

Estimation of contact damage rate in a nonlinear dynamic system using frequency-response functions and a 1D convolutional neural network

Povzetek. Vibracijsko utrujanje linearnih sistemov je dobro raziskano, medtem ko je utrujanje sistemov s kontaktnimi nelinearnostmi obravnavano precej manj sistematično, čeprav so prav take nelinearnosti pogosto prisotne v realnih izdelkih. V prispevku se obravnava vibracijsko utrujanje dinamskega sistema z eno prostostno stopnjo in kontaktno nelinearnostjo, ki je kinematsko vzbujan s širokopasovnim naključnim signalom. Predlagan je pristop za oceno hitrosti poškodbe v kontaktu preko frekvenčnih prenosnih funkcij (FPF). S pomočjo numeričnega modela se generira obsežna učna množica za širok razpon velikosti zračnosti in nivojev vzbujanja, na podlagi katere se uči enodimenzijska konvolucijska nevronska mreža (1D-CNN). Naučeni model dosega visoko korelacijo na numeričnih in neodvisnih eksperimentalnih podatkih, kar potrjuje, da FPF vsebujejo dovolj informacij za oceno hitrosti poškodbe zgolj iz meritev pospeškov, brez neposrednega dostopa do kontaktne površine.

Abstract. While the vibration fatigue of linear systems is well understood, the fatigue of systems with contact-induced nonlinearities has received far less systematic attention, despite such nonlinearities being common in real engineering structures. This paper studies the vibration fatigue of a single-degree-of-freedom dynamic system with a contact nonlinearity under broadband random base excitation and proposes an indirect approach for estimating the contact damage-accumulation rate from frequency-response functions (FRFs). A numerical contact model is used to generate a large training dataset over a wide range of gap sizes and excitation levels, which is used to train a one-dimensional convolutional neural network (1D-CNN). The trained model achieves a high correlation on both numerical and independent experimental data, confirming that FRFs contain sufficient information to characterise the contact state and the associated damage accumulation using acceleration measurements only, without direct access to the contact interface.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

1 Uvod

V procesu kvalifikacije izdelka je preizkušanje vibracijskega utrujanja na elektrodinamskih stresa-
salnikih [16] eden izmed ključnih korakov. Pri teh preizkusih se obremenitve, ki jih konstrukcija
doživi tekom celotne življenjske dobe, simulirajo v skrajšanem času s povečanimi nivoji [13].
Posledično postanejo vse bolj izrazite nelinearnosti, ki izvirajo iz ležajev, spojev ali utrujeno-
stnih razpok, kar spreminja dinamski odziv sistema.

Kontaktne nelinearnosti so v kompleksnih dinamskih sistemih pogoste, zlasti pri vijačenih in vr-
tljivih konstrukcijah, kjer trenje, zračnosti in vplivi kontaktne površine povzročajo znatna odsto-
panja od linearnega obnašanja; celovite študije, ki bi te nelinearnosti sistematično vključevale v
napoved življenjske dobe, pa so kljub temu redke [5]. Vijačeni spoji izkazujejo nelinearno spre-
menljivost togosti zaradi tangencialne histereze [15], ležaji pa nelinearnosti zaradi sprememb
zračnosti in geometrije napak [11]; tudi sistemi z bilinearno togostjo kažejo od amplitude odvi-
sne lastne frekvence in modalno sklapljanje [4]. V takih primerih načelo superpozicije ne velja
več, kar pogosto onemogoča izdelavo natančnih analitičnih modelov in vodi v nepričakovane
rezultate pospešenih vibracijskih preizkusov, saj obremenitve ne predstavljajo več ustreznega
ekvivalenta realnim obratovalnim pogojem.

Ker običajni pristopi pri kompleksnih nelinearnih pojavih pogosto odpovejo, se vse bolj uvelja-
vljajo podatkovno vodene metode in metode strojnega učenja za spremljanje stanja konstrukcij
[2]. Med njimi so se konvolucijske nevronske mreže izkazale za posebej učinkovite, saj sa-
modejno izluščijo značilke iz surovih signalov; enodimenzijske različice (1D-CNN) so posebej
primerne za obdelavo časovnih vrst in FPF [7]. Pomanjkljivost zgolj podatkovno vodenih me-
tod je potreba po obsežnih učnih množicah, ki jih je eksperimentalno pogosto nepraktično ali
predrago zbrati.

To pomanjkljivost naslavlja hibridni in fizikalno informirani pristopi, ki združujejo neme-
rične simulacije z omejenim obsegom eksperimentalnih podatkov [17, 8]. V tem prispevku je
predstavljen tak hibridni numerično-eksperimentalni pristop za oceno hitrosti poškodbe v kon-
taktu med vibracijskim utrujanjem. Kot reprezentativni model kontaktne površine se uporabi
sistem z eno prostostno stopnjo (1 PS) s progresivno togostjo. 1D-CNN se nauči na numerično
generiranih FPF, nato pa se ga preizkusi na neodvisnih eksperimentalnih meritvah.

2 Teoretične osnove

2.1 Nelinearni dinamski sistem s kontaktom

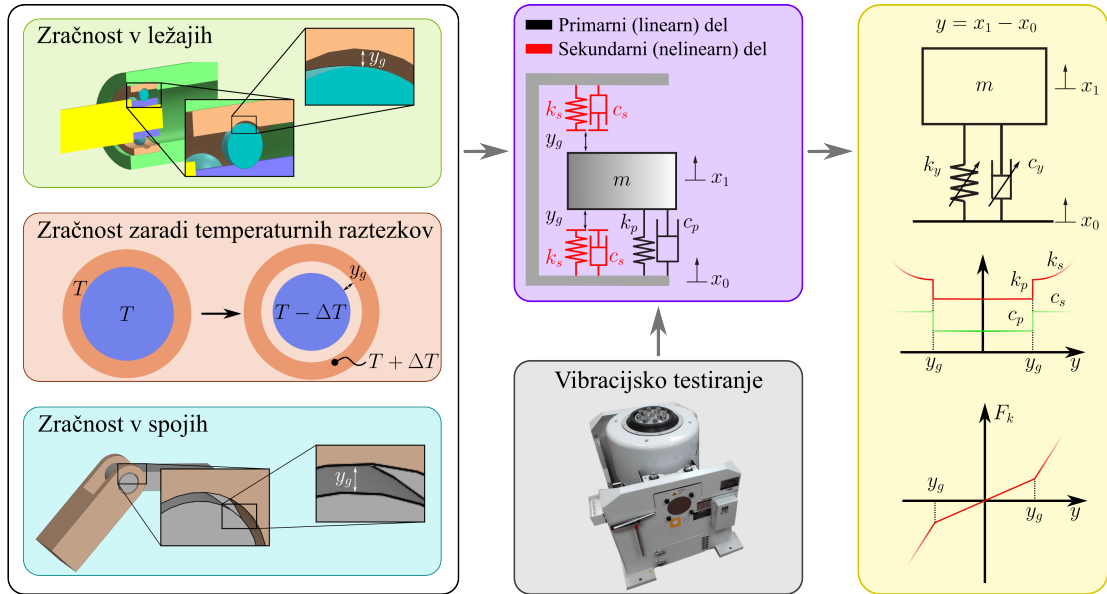
Linearni del sistema (slika 1) se predstavi z modelom masa–vzmet–dušilka, kjer primarna vzmet
s togostjo k_p in dušilka s koeficientom c_p neprekinjeno delujeta na maso. Sekundarna vzmet s
togostjo k_s in dušilka s koeficientom c_s se aktivirata, ko relativni pomik y preseže zračnost y_g .
Relativni pomik y je definiran kot razlika med absolutnim pomikom mase $x_1(t)$ in absolutnim
pomikom podlage $x_0(t)$. Gibalna enačba sistema se lahko zapiše kot:

$$\ddot{y} + \frac{c(y)}{m} \dot{y} + \frac{k(y)}{m} y = -\ddot{x}_0, \quad (1)$$

kjer je m masa, $c(y)$ in $k(y)$ pa odsekoma zvezna funkcija dušenja oziroma togosti:

$$k(y) = \begin{cases} k_p & ; |y| \leq y_g \\ k_p + \frac{k_s(|y|)(|y| - y_g)}{|y|} & ; |y| > y_g \end{cases}, \quad (2)$$

analogno velja za odsekoma zvezno dušenje $c(y)$, saj kontakt predstavlja pomemben vir disipacije energije. Tak sistem lahko predstavlja poenostavitev notranjega/zunanjega obroča ležaja, vijaka, zakovice ali drugega spoja, kjer je prisotna začetna togost, ki se ob kontaktu različnih delov hitro spremeni. Ker je obravnavani sistem nelinearen in vzbujan z naključnim Gaussovim signalom $\ddot{x}_0(t)$, analitične in semi-analitične metode [9] niso uporabne, zato se gibalna enačba (1) rešuje s časovno integracijo.



Slika 1: Poenostavitev realnih kontaktnih pojavov v nelinearni sistem z eno prostostno stopnjo.

Ko relativni pomik preseže velikost zračnosti, pride do kontakta in pojavi se sekundarna sila F_s . Pri majhnih nivojih vzbujanja je odziv linearen, z naraščanjem vzbujanja pa se nelinearni učinki krepijo. Medtem ko primarna sila F_p narašča linearno z nivojem vzbujanja, sekundarna sila F_s narašča hitreje in kmalu prevladuje. Zato se F_s uporabi kot ocena resnosti kontakta in glavni vir poškodb pri močno nelinearnih pogojih.

V linearnih časovno nespremenljivih sistemih je FPF neodvisna od amplitude vzbujanja [12]. Pri nelinearnih sistemih pa se FPF znatno spreminja z amplitudo vzbujanja. To amplitudno odvisnost, ki se iz razmerja avto- in križnih spektrov ocenjuje med vzbujanjem z naključnim signalom [14], se izkoristi za kvantifikacijo nelinearnosti sistema in s tem kot pokazatelj resnosti kontakta ter pripadajoče hitrosti poškodbe.

2.2 Vrednotenje vibracijskega utrujanja

Za oceno visokocikličnega utrujanja se uporabi napetostni pristop. Razmerje med številom ciklov in amplitudo obremenitve podaja S–N krivulja, izražena z Basquinovo enačbo [10]:

$$S^k N_f = C, \quad (3)$$

kjer sta parametra k in C določena eksperimentalno, N_f pa je število ciklov do odpovedi pri amplitudi S . Linearna akumulacija poškodbe se opiše s Palmgren–Minerjevim pravilom [10]:

$$D_i = \frac{n_i}{N_{i,f}}, \quad (4)$$

pri čemer odpoved nastopi pri $\sum_i D_i = 1$. Pri obremenjevanju s spremenljivo amplitudo se cikli v časovni domeni preštejejo z metodo Rainflow [1], alternativno pa se lahko utrujanje vrednoti v frekvenčni domeni s spektralnimi metodami [18].

3 Metodologija

Za povezavo frekvenčnega odziva sistema s hitrostjo poškodbe sekundarne vzmeti sta bila razvita numerični model in pripadajoča eksperimentalna postavitev s skupnima vhodnima parametroma: velikostjo zračnosti y_g in nivojem PSD vzbujanja A . Pri obeh se iz odziva sistema z metodo Rainflow oceni hitrost poškodbe, vzporedno pa se izračunajo FPF, ki služijo kot njen pokazatelj. Povezavo med FPF in hitrostjo poškodbe $\dot{D}_s$ vzpostavi 1D-CNN, naučen na numeričnih in ovrednoten na eksperimentalnih podatkih. Celoten potek je prikazan na sliki 2, podrobnosti posameznih korakov pa so podane v nadaljevanju.

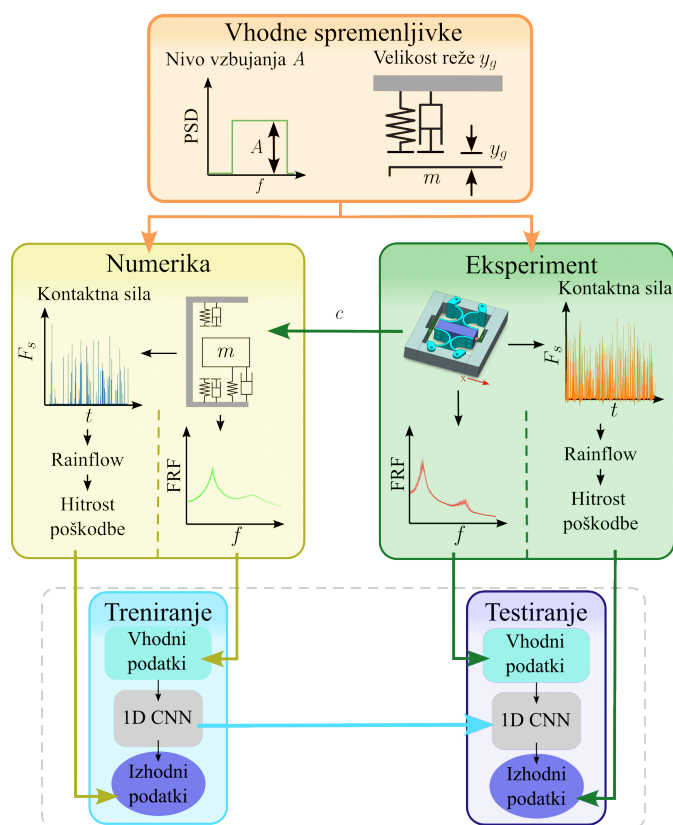
4 Numerični model

V tem poglavju je predstavljen numerični model sistema s kontaktno nelinearnostjo, ki se uporabi za generiranje odzivnih podatkov, izračun FPF in oceno kontaktne poškodbe. Parametri numeričnega modela so povzeti v tabeli 1.

Tabela 1: Vrednosti, uporabljene v numeričnem modelu.

Spremenljivka	Vrednost	Enota
m	1,1	kg
c_p	1,5	Ns/m
c_s	425	Ns/m
k_p	68000	N/m
k_s	$28 \cdot 10^4 e^{614y} + 49417$	N/m
y_g	$5 \cdot 10^{-5} - 150 \cdot 10^{-5}$	m
A	0,003 – 1	(m/s ²) ² /Hz

Dinamski odziv je bil izračunan z eksplicitno metodo Runge–Kutta reda 5(4). Za vsako kombinacijo nivoja vzbujanja A in zračnosti y_g je bila izvedena simulacija dolžine 50 s s časovnim korakom $1 \cdot 10^{-4}$ s; skupaj 10^5 simulacij. Vsak časovni potek je bil razdeljen na 10-sekundne odseke z 90 % prekrivanjem (41 signalov na simulacijo). Za vsak odsek je bila iz časovnega poteka sekundarne sile z metodo Rainflow, implementirano v knjižnici fatpack [6], in S–N



Slika 2: Shema poteka predlaganega pristopa za oceno hitrosti poškodbe v kontaktu.

krivuljo (enačbi (3) in (4)) izračunana povprečna hitrost poškodbe $\dot{D}_s$, hkrati pa FPF relativnih pospeškov $\ddot{Y}/\ddot{X}_0$. Skupaj je bilo dobljenih $4,1 \cdot 10^6$ parov FPF in pripadajočih hitrosti poškodbe.

4.1 Model strojnega učenja

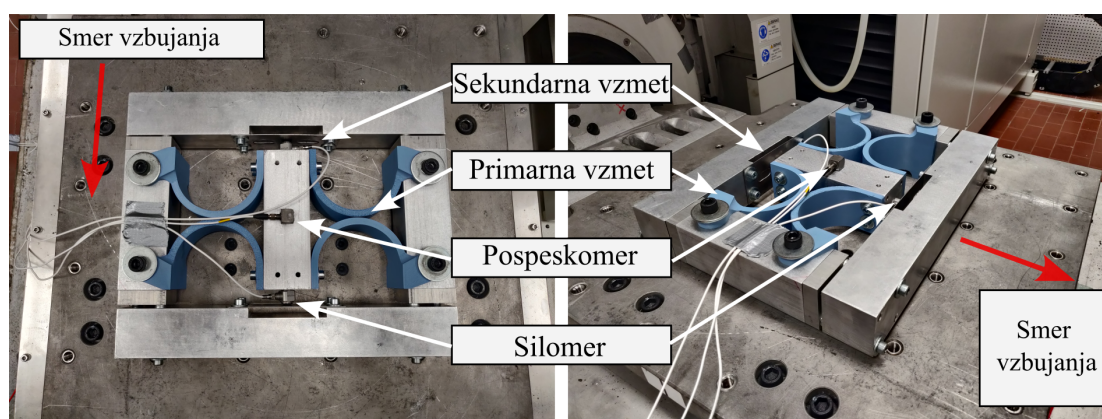
FPF nelinearnih sistemov vsebujejo veliko informacij o dinamiki kontakta in posledično o hitrosti poškodbe, vendar je potencialna povezava med spektralnimi značilkami FPF in resnostjo poškodbe močno nelinearna in ni primerna za enostavno analitično preslikavo. Zato se uporabi 1D-CNN, ki obdela FPF v frekvenčnem območju 20–300 Hz z ločljivostjo 1 Hz (vhodni vektor z 278 komponentami). Mreža prek treh konvolucijskih slojev postopoma izlušči značilne spektralne značilke, nato pa kot dodaten vhod doda amplitudo vzburjanja A ; trije polno povezani sloji preslikajo značilke v skalarno napoved hitrosti poškodbe. Skupno število parametrov mreže je 10657, arhitektura pa sledi uveljavljenim načelom zasnove 1D-CNN [3].

Učna množica $4,1 \cdot 10^6$ parov je bila naključno razdeljena na učni (80 %) in validacijski (20 %) del, mreža pa je bila učena 20 epoh z velikostjo paketa 1024. Na validacijskih podatkih (turkizna barva na sliki 4) model uspešno zajame nelinearno preslikavo med značilkami FPF in hitrostjo poškodbe v kontaktu ter doseže visoko korelacijo napovedi $R^2 = 0,985$. To potrjuje, da FPF vsebujejo dovolj informacij za zanesljivo oceno hitrosti poškodbe.

5 Eksperimentalna validacija

Naslednji korak je preverjanje, ali je naučeni model zmožen napovedi na eksperimentalni postavitvi. Ker učenje nevronske mreže zahteva obsežno množico podatkov, ki jih je na realnih izdelkih nepraktično zbrati, je bil model naučen izključno na numerično generiranih podatkih, eksperimentalne meritve pa so bile uporabljene le za preizkušanje.

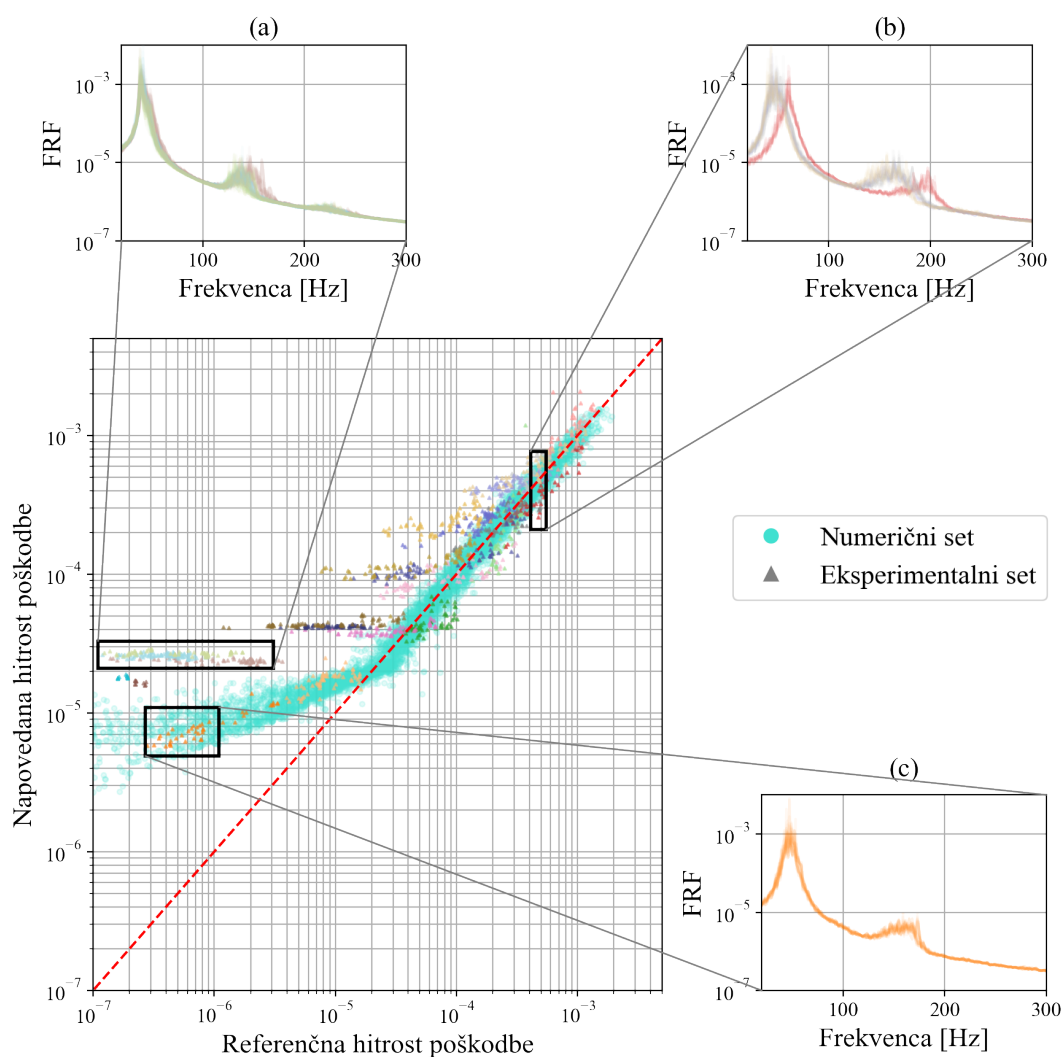
Eksperimentalna postavitve (slika 3) je zasnovana tako, da čim natančneje posnema numerični model. Primarna vzmet se v delovnem območju obnaša kar se da linearno, sekundarna vzmet pa ohranja opazne nelinearne lastnosti. Na maso sta pritrjena dva senzorja sile (po eden na vsaki strani) za merjenje kontaktnih sil, en pospeškomer meri odziv mase, drugi pa na plošči stresalnika krmili in beleži vzbujanje. Zračnost se je nastavljala z vstavljanjem podložk; meritve so bile izvedene pri štirih velikostih zračnosti in osmih nivojih vzbujanja, s pravokotno PSD med 20 in 300 Hz, kar ustreza pogojem v numeričnih simulacijah. Eksperimentalno pridobljene FPF



Slika 3: Eksperimentalna preizkuševalna naprava.

kažejo enake kvalitativne trende kot numerične simulacije: z naraščanjem amplitude A se prva lastna frekvenca pomakne navzgor, pri pogostih kontaktih se poveča efektivno dušenje (širši resonančni vrh), pri večjih zračnostih pa postane izrazitejša druga lastna frekvenca. Čeprav je numerični model idealizirana predstavitev fizikalnega sistema, zajame vse ključne značilnosti, pomembne za interpretacijo FPF in oceno poškodbe v kontaktu.

Model, naučen izključno na numeričnih podatkih, je bil nato ovrednoten na eksperimentalnih meritvah (slika 4), kjer doseže korelacijo $R^2 = 0,93$ med napovedanimi in referenčnimi hitrostmi poškodbe. Na sliki 4 so eksperimentalne meritve predstavljene s barvnimi trikotniki, kjer vsaka barva predstavlja svoj set meritev (velikosti reže in amplitude vzbujanja). Večji raztros se opazi pri nizkih nivojih poškodbe, kar je posledica nestacionarnosti odziva, medtem ko se pri višjih hitrostih poškodbe (območja večjega praktičnega pomena, kjer so nelinearni učinki izrazitejši) korelacija izboljša. Napovedane hitrosti poškodbe so rahlo precenjene glede na referenčne vrednosti, kar je z vidika ocene utrujanja ugodno, saj vodi v varnejše napovedi.



Slika 4: Validacija naučenega modela strojnega učenja na eksperimentalnih meritvah.

6 Zaključek

V prispevku je bil sistematično preučen vpliv realnih kontaktnih nelinearnosti na vibracijsko utrujanje dinamsko vzbujanega sistema. Z združevanjem numeričnega modeliranja, kontroliranih vibracijskih preizkusov in strojnega učenja je bilo pokazano, da stanje kontakta (velikost reže) in nivo vzbujanja močno vplivata na odziv sistema, kar se neposredno odraža v značilnostih FPF. Spremembe zračnosti in amplitude vzbujanja vodijo v premike lastnih frekvenc, spremembe efektivnega dušenja in pojav višjih lastnih frekvenc, zato dinamskega obnašanja sistemov s kontaktom ni mogoče ustrezno opisati z linearnimi predpostavkami.

Čeprav je v eksperimentu poškodbo v kontaktu mogoče zanesljivo kvantificirati le z neposre-

dnim merjenjem sil, ki je v realnih izdelkih praviloma nepraktično ali nemogoče, je bilo pokazano, da se to omejitev premaga s podatkovno vodenimi metodami. Nevronska mreža, naučena zgolj na podatkih poenostavljenega numeričnega modela, omogoča robustno in razmeroma natančno oceno hitrosti poškodbe izključno iz izmerjenega odziva in pripadajočih FPF. To odpira pot k zanesljivejšemu in stroškovno učinkovitejšemu ocenjevanju vibracijskega utrujanja realnih izdelkov s kontaktnimi nelinearnostmi, kjer se model lahko nauči z digitalnim dvojčkom in nato izvajajo meritve na realnih izdelkih med vibracijskimi preizkusi.

Literatura

- [1] ASTM International. ASTM E1049-85(2017): Standard practices for cycle counting in fatigue analysis, 2017.
- [2] O. Avci, O. Abdeljaber, S. Kiranyaz, M. Hussein, M. Gabbouj, and D. J. Inman. A review of vibration-based damage detection in civil structures: From traditional methods to machine learning and deep learning applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 147:107077, 2021.
- [3] F. Chollet. *Deep Learning with Python*. Manning Publications, 2018.
- [4] B. Clark, M. S. Allen, and B. Pacini. Nonlinear normal modes and response to random inputs of systems with bilinear stiffness. *Journal of Sound and Vibration*, 595:118767, 2025.
- [5] A. Fantetti, D. Botto, S. Zucca, and C. Schwingshackl. Guidelines to use input contact parameters for nonlinear dynamic analysis of jointed structures: Results of a round robin test. *Tribology International*, 191:109158, 2024.
- [6] G. T. Frøseth. fatpack: A Python package for fatigue analysis. <https://github.com/Gunnstein/fatpack>, 2020.
- [7] S. Kiranyaz, O. Avci, O. Abdeljaber, T. Ince, M. Gabbouj, and D. J. Inman. 1d convolutional neural networks and applications: A survey. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 151:107398, 2021.
- [8] J. Korbar, D. Ocepek, G. Čepon, and M. Boltežar. Training artificial neural networks using substructuring techniques: Application to joint identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 198:110426, 2023.
- [9] M. Krack and J. Gross. *Harmonic Balance for Nonlinear Vibration Problems*. Springer, 2019.
- [10] Y.-L. Lee, J. Pan, R. B. Hathaway, and M. E. Barkey. *Fatigue Testing and Analysis: Theory and Practice*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.
- [11] J. Liu, L. Xue, L. Wang, Z. Shi, and M. Xia. A new impact model for vibration features of a defective ball bearing. *ISA Transactions*, 142:465–477, 2023.

- [12] N. M. M. Maia and J. M. Montalvão e Silva. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press, 1998.
- [13] K. G. McConnell and P. S. Varoto. *Vibration Testing: Theory and Practice*. John Wiley & Sons, 2 edition, 2008.
- [14] D. E. Newland. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*. Longman, 3 edition, 1993.
- [15] W. Shi and Z. Zhang. Nonlinear vibration mechanism and modeling for flange-bolted joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 211:111183, 2024.
- [16] J. Slavič, M. Boltežar, M. Mršnik, M. Česnik, and J. Javh. *Vibration Fatigue by Spectral Methods: From Structural Dynamics to Fatigue Damage*. Elsevier, 2020.
- [17] T. Vrtač, D. Ocepek, M. Česnik, G. Čepon, and M. Boltežar. A hybrid modeling strategy for training data generation in machine learning-based structural health monitoring. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 207:110937, 2024.
- [18] A. Zorman, J. Slavič, and M. Boltežar. Vibration fatigue by spectral methods—a review with open-source support. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 190:110149, 2023.



Temperaturna odvisnost parametrov utrujanja 3D-natisnjenih PEEK struktur

Rozalija Petrovčič¹, Martin Česnik¹, Janko Slavič¹

Temperature dependence of fatigue parameters in 3D-printed PEEK structures

Povzetek. Prispevek obravnava vpliv temperature na dobo trajanja pri vibracijskem utrujanju 3D-natisnjenih struktur iz polietar eter ketona (PEEK). Raziskava združuje zasnovno vzorca, numerično modeliranje, izdelavo vzorcev s postopkom ciljnega nalaganja (FFF), eksperimentalno testiranje na elektrodinamskem stresalniku s temperaturno komoro ter identifikacijo parametrov utrujanja. Preizkusi so bili izvedeni pri temperaturah -40 , -10 , 25 , 75 in 120°C . Na podlagi spremljanja sprememb modalnih parametrov in uporabe Dirlikove metode so bile določene dobe trajanja ter parametri Basquinove enačbe. Rezultati kažejo izrazito temperaturno odvisnost odpornosti PEEK-a na utrujanje, pri čemer nižje temperature povečujejo odpornost proti utrujanju, višje pa jo zmanjšujejo.

Abstract. The paper addresses the influence of temperature on fatigue life under vibration loading of 3D-printed structures made from polyether ether ketone (PEEK). The research integrates specimen design, numerical modeling, fabrication of samples using fused filament fabrication (FFF), experimental testing on an electrodynamic shaker with a temperature chamber, and identification of fatigue parameters. Tests were conducted at temperatures of -40 , -10 , 25 , 75 , and 120°C . Based on monitoring changes in modal parameters and applying Dirlik's method, fatigue lives and the parameters of the Basquin equation were determined. The results show a pronounced temperature dependence of the fatigue resistance of PEEK, with lower temperatures increasing fatigue resistance and higher temperatures reducing it.

1 Uvod

Zaradi naraščajočih zahtev po lahkih in visokozmogljivih strukturah se v sodobnem inženirstvu vse pogosteje uporablja polietar eter keton (PEEK), zlasti v kombinaciji s 3D-tiskom s ciljnimi

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

nalaganjem. PEEK je napreden termoplast z odličnimi mehanskimi lastnostmi, visoko temperaturno stabilnostjo in dobro kemično odpornostjo, zaradi česar je primeren za zahtevne aplikacije v letalski, medicinski in vesoljski industriji [8, 9]. Njegova delno kristalinična struktura omogoča ohranjanje trdnosti tudi pri povišanih temperaturah ter dobro dimenzijsko stabilnost [10].

3D-tisk PEEK-a pa prinaša pomembne izzive. Zaradi visokih procesnih temperatur (šoba nad 350 °C, ogrevana komora) in občutljivosti na temperaturne gradientne je kakovost izdelkov močno odvisna od parametrov tiskanja [3, 7]. Ključni dejavniki so temperatura, hitrost tiskanja, orientacija slojev in struktura polnila. Neustrezni pogoji lahko povzročijo poroznost, slabo adhezijo med plastmi in delaminacijo, kar zmanjšuje mehanske lastnosti [16, 19, 4]. Zaradi slojevite izdelave so 3D-natisnjeni izdelki pogosto anizotropni in vsebujejo mikrostrukturne nepravilnosti, ki delujejo kot začetna mesta za iniciacijo razpok.

To je posebej pomembno pri utrujanju materiala, ki predstavlja progresiven proces nastajanja in rasti razpok pod cikličnimi obremenitvami [5, 22]. Pri visokocikličnem utrujanju (HCF), značilnem za vibracijske obremenitve, so deformacije pretežno elastične, obnašanje materiala pa opisujemo z Wöhlerjevo krivuljo oziroma Basquinovo enačbo [17, 23].

Raziskave utrujanja 3D-natisnjenega PEEK-a so še omejene, vendar kažejo na nadpovprečno odpornost v primerjavi z drugimi polimeri, ob hkratni veliki razpršenosti rezultatov zaradi procesnih vplivov [13, 4]. Pomemben dejavnik je struktura polnila, ki vpliva na porazdelitev napetosti in dobo trajanja [4]. Pri cikličnih obremenitvah se pojavi tudi lokalno segrevanje zaradi disipacije energije, kar lahko dodatno pospeši degradacijo materiala [13].

Pri vibracijskem utrujanju, kjer je vzbujanje pogosto naključno, se analiza učinkovito izvaja v frekvenčni domeni. Spektralne številne metode omogočajo povezavo med gostoto močnostnega spektra napetosti in dobo trajanja, kar predstavlja učinkovito alternativo časovno zahtevnim pristopom [2, 11].

PEEK tako predstavlja zelo obetaven material za zahtevne aplikacije, vendar 3D-tisk uvaja dodatne kompleksnosti, ki vplivajo na njegovo obnašanje pri dinamskih obremenitvah. Nadaljnje raziskave vpliva procesnih parametrov, temperature in vibracijskih obremenitev so ključne za zanesljivo uporabo teh struktur v praksi.

V nadaljevanju prispevka bo najprej predstavljena metodologija raziskave, vključno z zasnovo vzorca, izdelavo numeričnega modela eksperimenta, 3D-tiskom vzorcev, izvedbo eksperimenta ter identifikacijo parametrov utrujanja. Sledijo rezultati z diskusijo, na koncu pa so podani še zaključki.

2 Metodologija

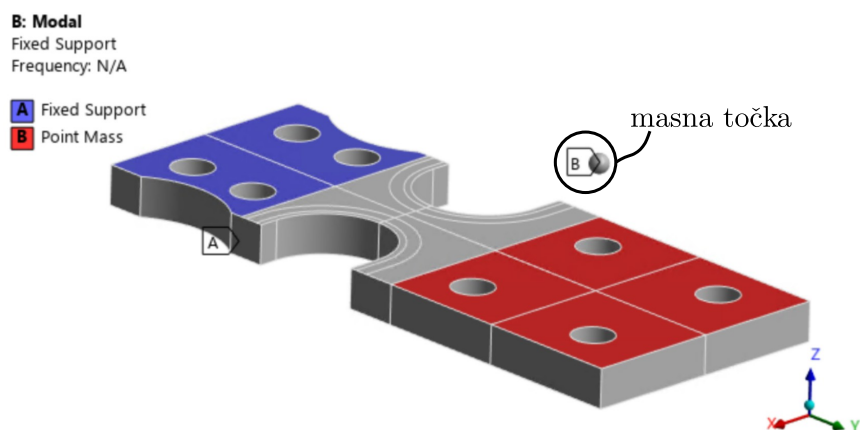
Metodologija sledi delu [12].

2.1 Zasnova vzorca in numerični model

Vzorec za vibracijsko utrujanje je bil zasnovan z namenom doseganja približno enoosnega napetostnega stanja v območju zožitve, kjer pričakujemo iniciacijo razpoke. Geometrija temelji na standardnih vzorcih za utrujanje [6], prilagojenih za 3D-tisk. Posebna pozornost je bila

namenjena tudi zasnovi vpetja na elektrodinamski stresalnik ter integraciji uteži z vgrajenim pospeškometerom, ki omogoča spremljanje dinamskega odziva.

Numerični model je bil izdelan v programu *Ansys* z uporabo 20-vozliščnih volumskih elementov (Solid186) [1]. Mreža je bila zgoščena v območju zožitve zaradi pričakovanih koncentracij napetosti. Model vključuje togo vpetje na mestu pritrditve ter masno točko, ki simulira utež, kar prikazuje slika 1.



Slika 1: Območje togega vpetja (modra barva) in območje, na katerega je vezana masna točka (rdeča barva).

Modalna analiza je pokazala, da je za doseganje prve lastne frekvence okoli 50 Hz potrebna masa uteži približno 63 g. Napetosti so skoncentrirane v območju zožitve, kar potrjuje ustreznost zasnove za teste vibracijskega utrujanja. Na tej osnovi je bilo določeno frekvenčno območje vzbujaanja do 70 Hz.

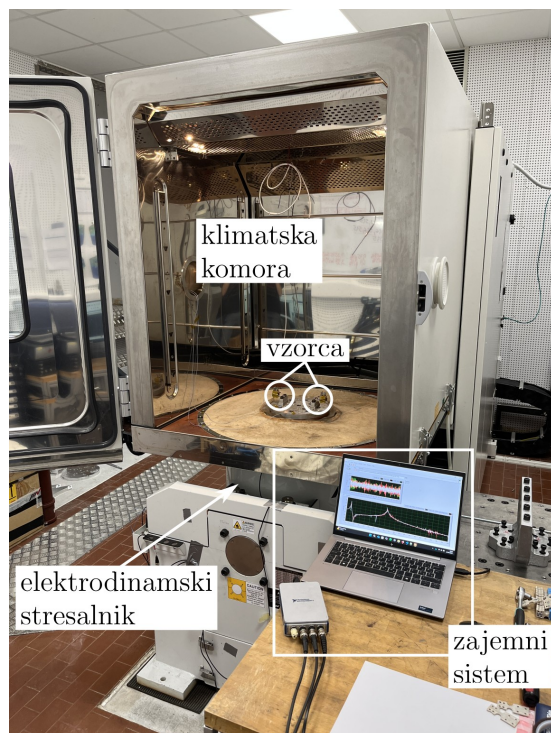
2.2 3D-tisk vzorcev

Vzorci smo izdelali na tiskalniku CreatBOT PEEK 300 z uporabo filamenta Victrex 450GTM. Ključni parametri tiskanja so bili temperatura šobe 420 °C, temperatura postelje 160 °C in temperatura komore 115 °C. Uporabljena je bila višina plasti 0,2 mm ter 100 % pravokotno polnilo pod kotom 45°.

Za izboljšanje adhezije na posteljo smo uporabili *brim*, tj. dodatne obodne sledi materiala okoli vzorca, ki povečajo njegovo naležno površino. Za zmanjšanje hrapavosti zgornje površine smo uporabili postopek *ironing*, pri katerem segreta šoba z dodatnim prehodom izravna zgornjo plast natisnjene vzorca. Ta postopek ima pomemben vpliv na iniciacijo razpok.

2.3 Eksperimentalni del

Eksperimenti so bili izvedeni na elektrodinamskem stresalniku IMV A12 v klimatski komori (slika 2). Vzorec je bil togo vpet, odziv pa je bil merjen z referenčnim pospeškometerom na stresalniku in merilnim pospeškometerom v uteži.



Slika 2: Postavitev eksperimenta.

Vzbujanje je bilo definirano z naključnim signalom pospeška (PSD) in nadzirano preko povratne zanke krmilnega sistema [18]. Signali so bili zajeti z merilno kartico NI 9234 ter obdelani v okolju *LabVIEW*. Spremljanje frekvenčnih prenosnih funkcij (FPF) je omogočalo zaznavanje degradacije vzorcev preko padca lastne frekvence.

Testi so bili izvedeni pri različnih temperaturah (-40 , -10 , 25 , 75 in 120 °C), pri čemer sta bila za vsako temperaturo uporabljena dva nivoja vzbujanja za zajem območja nizko- in visokocikličnega utrujanja. Vzbujanje je bilo omejeno na območje prve lastne frekvence. Povzetek izvedenih testov podaja preglednica 1, pri čemer so vzorci poimenovani tako, da sta številki 90 in 91 zadnji dve številki serijske številke pospeškomerov, V se nanaša na vzorec, številka, ki sledi črki, pa je številka zaporednega testa. Pri vsakem testu sta bila sočasno testirana dva vzorca.

2.4 Obdelava podatkov meritev

Doba trajanja je bila določena na podlagi 5 % padca lastne frekvence [23, 20]. Frekvenčne prenosne funkcije so bile izračunane s cenilko:

$$H_2(f) = \frac{S_{\ddot{x}\ddot{x}}(f)}{S_{\ddot{y}\ddot{y}}(f)}, \quad (1)$$

kjer sta spektralni gostoti določeni z Welchovo metodo [15]. Signal je bil razdeljen na segmente in obdelan z uporabo Hannovega okna.

Tabela 1: Pogoji testiranja vzorcev.

Temperatura [°C]	Nivo vzbujanja [(m/s ²) ² /Hz]	Vzorec 1	Vzorec 2
−40	19,6	90-V8	91-V8
	7,4	90-V7	91-V7
−10	24,5	90-V4	91-V4
	4,9	90-V5	91-V5
25	24,5	90-V1	91-V1
	4,9	90-V3	91-V3
75	24,5	90-V9	91-V9
	3,9	90-V11	91-V11
120	24,5	90-V12	91-V12
	4,9	90-V13	91-V13

Modalni parametri (lastne frekvence in razmernik dušenja) so bili določeni z metodo kompleksnih eksponentov v frekvenčni domeni (ang. *least-squares complex frequency*) [21].

2.5 Posodabljanje numeričnega modela in identifikacija parametrov utrujanja

Numerični model je bil posodobljen na podlagi eksperimentalno določenih lastnih frekvenc. Modul elastičnosti je bil uporabljen kot vhodni parameter za ujemanje numeričnega modela z meritvami. Na tej osnovi smo določili napetosti v območju zožitve ter rekonstruirali spektralno gostoto mehanskih napetosti $G_{\sigma\sigma}$.

Prenosnost sistema iz kinematskega vzbujanja na mehanske napetosti $H_{\sigma\ddot{y}}$ smo izračunali na podlagi numeričnega modela. PSD napetosti je podan kot:

$$G_{\sigma\sigma}(\omega) = |H_{\sigma\ddot{y}}(\omega)|^2 G_{\ddot{y}\ddot{y}}(\omega). \quad (2)$$

Za oceno dobe trajanja smo uporabili Dirlikovo metodo [2], implementirano v Python paketu *fatiguepy* [14]. Parametra utrujanja b in S_f smo določili z minimizacijo funkcije:

$$Q(b, S_f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\log_{10}(T_{act,i}) - \log_{10}(T_{est,i}(b, S_f)) \right)^2, \quad (3)$$

kar omogoča optimalno ujemanje med eksperimentalnimi in ocenjenimi dobami trajanja.

3 Rezultati in diskusija

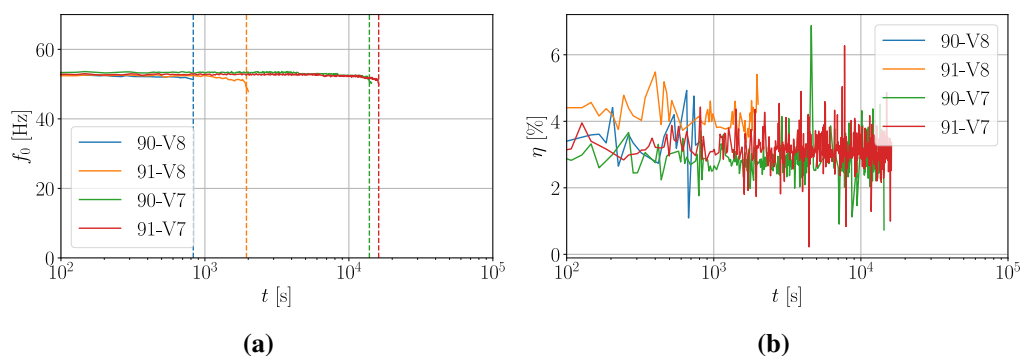
3.1 Eksperimentalno določena doba trajanja

Rezultati eksperimentalnega določanja dobe trajanja so prikazani na slikah 3–7. Modra in oranžna barva pripadata vzorcem, testiranim pri višjem nivoju vzbujanja, zelena in rdeča pa vzorcem, testiranim pri nižjem nivoju vzbujanja.

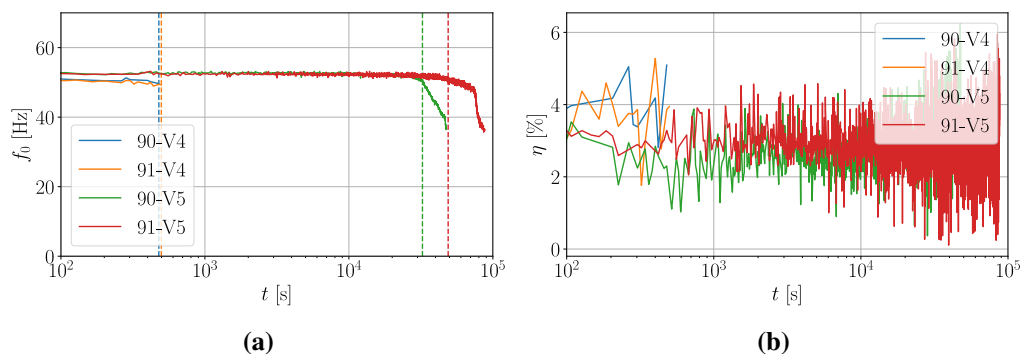
Rezultati kažejo izrazito temperaturno odvisnost dinamskih lastnosti. Z višanjem temperature se lastna frekvenca zmanjšuje, kar je posledica znižanja modula elastičnosti PEEK-a. Hkrati se povečuje razmernik dušenja, kar nakazuje na večjo notranjo disipacijo energije zaradi večje mobilnosti polimernih verig.

Pri višjih nivojih vzbujaanja opazimo dodatno znižanje lastne frekvence in povečanje dušenja, kar kaže na nelinearno obnašanje materiala in prisotnost mikrostrukturnih poškodb. Posledično so dobe trajanja pri višjih obremenitvah bistveno krajše.

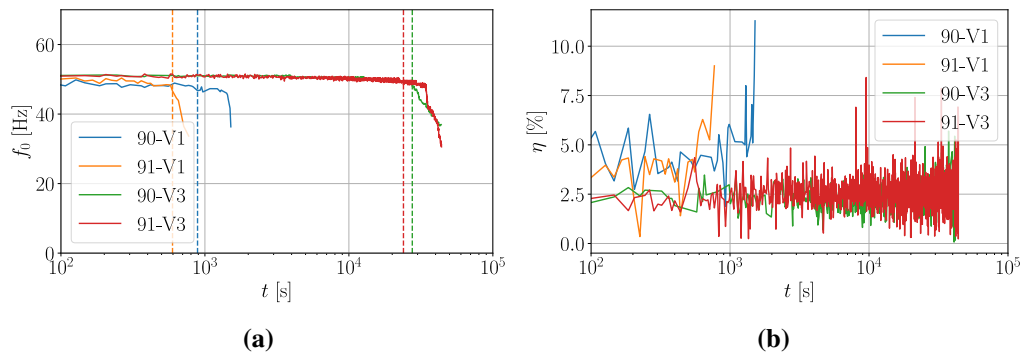
Temperatura in nivo vzbujaanja torej bistveno vplivata na akumulacijo utrujenostne poškodbe, saj vplivata na togost, dušenje in s tem na spektralno porazdelitev napetosti v vzorcu.



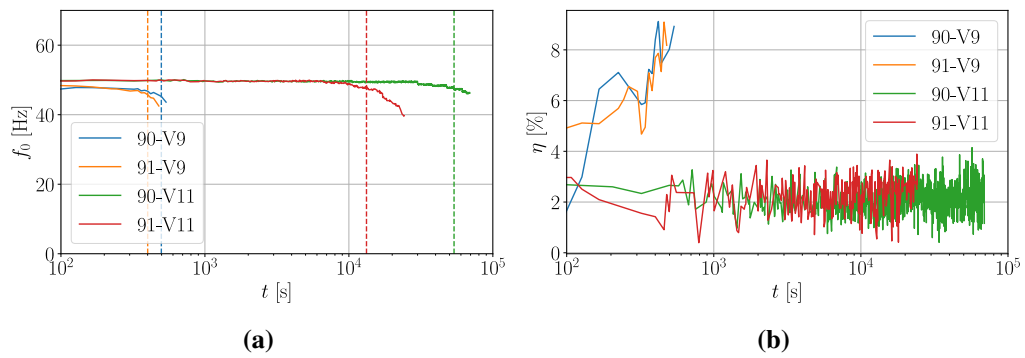
Slika 3: Rezultati eksperimentov pri -40°C : (a) padec lastne frekvence s prikazano dobo trajanja in (b) spreminjanje razmernika dušenja.



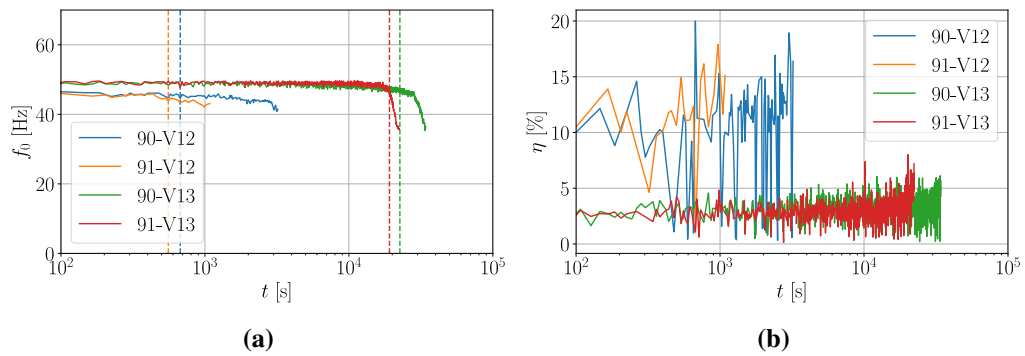
Slika 4: Rezultati eksperimentov pri -10°C : (a) padec lastne frekvence s prikazano dobo trajanja in (b) spreminjanje razmernika dušenja.



Slika 5: Rezultati eksperimentov pri 25 °C: (a) padec lastne frekvence s prikazano dobo trajanja in (b) spreminjanje razmernika dušenja.



Slika 6: Rezultati eksperimentov pri 75 °C: (a) padec lastne frekvence s prikazano dobo trajanja in (b) spreminjanje razmernika dušenja.



Slika 7: Rezultati eksperimentov pri 120 °C: (a) padec lastne frekvence s prikazano dobo trajanja in (b) spreminjanje razmernika dušenja.

3.2 Parametri utrujanja

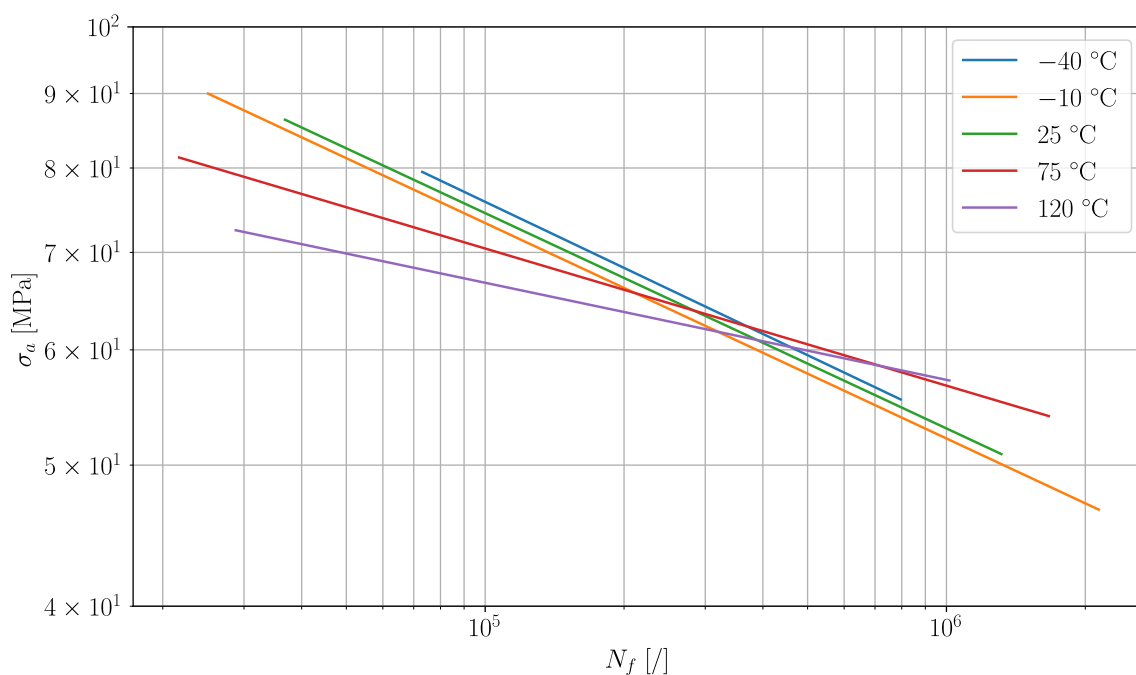
Na podlagi eksperimentalnih rezultatov in postopka, predstavljenega v podpoglavju 2.5, so bili določeni parametri utrujanja, ki so podani v tabeli 2.

Tabela 2: Ocenjeni parametri utrujanja.

Temperatura [°C]	b [/]	S_f [MPa]
−40	−0,151	477,2
−10	−0,148	446,5
25	−0,148	453,0
75	−0,094	222,4
120	−0,067	150,6

Z višanjem temperature opazimo izrazit upad parametra S_f , kar pomeni zmanjšanje odpornosti materiala na utrujanje. Hkrati se absolutna vrednost eksponenta b zmanjšuje, kar pomeni, da se z naraščanjem števila ciklov napetost počasneje zmanjšuje. Posledično so S-N krivulje pri višjih temperaturah bolj položne (slika 8).

Na sliki 8 so prikazane S-N krivulje za različne temperature.



Slika 8: S-N krivulje za različne temperature.

3.3 Razprava

Pri nižjih temperaturah (-40°C in -10°C) material prenese višje napetosti pri enakem številu ciklov, kar kaže na večjo odpornost na utrujanje, vendar je hkrati zaradi nižje temperature tudi bolj krhek. Nasprotno se pri višjih temperaturah (75°C in 120°C) krivulje pri manjšem številu ciklov nahajajo pri nižjih napetostih, kar odraža zmanjšanje trdnosti in nosilnosti materiala zaradi temperaturnega mehčanja.

Poleg znižanja ravni napetosti se z višanjem temperature spremeni tudi naklon S-N krivulj. Bolj položne krivulje so povezane z zmanjšanjem absolutne vrednosti eksponenta b . Fizikalno je takšno obnašanje mogoče povezati z večjo molekularno mobilnostjo polimernih verig pri povišani temperaturi, zaradi česar postane material bolj duktilen in izraziteje viskoelastičen. Večja sposobnost lokalne deformacije in prerazporeditve napetosti lahko zmanjša izrazitost lokalnih koncentracij napetosti ter upočasni spremembo trdnosti pri utrujanju z naraščanjem števila ciklov.

Bolj položna S-N krivulja pri višjih temperaturah ima lahko tudi praktičen pomen. Čeprav je začetna raven amplitude mehanske napetosti pri povišani temperaturi nižja, se pri večjem številu ciklov razlika glede na nižje temperature zmanjšuje. Zato lahko takšno obnašanje predstavlja prednost pri visokotemperaturnih aplikacijah, kjer so obremenitve relativno nizke, vendar se pojavljajo zelo dolgo oziroma pri velikem številu ciklov. Vendar ta prednost velja le v določenem območju napetosti, saj višja temperatura hkrati povzroči zmanjšanje togosti in splošne nosilnosti materiala. Pri načrtovanju konstrukcij je zato treba upoštevati tako absolutno raven trdnosti pri utrujanju kot tudi njeno odvisnost od števila ciklov.

Zanimivo je, da se pri 120°C v območju večjega števila ciklov pokaže relativno izboljšanje obnašanja. To lahko pripišemo mehčanju materiala, ki vodi v bolj enakomerno porazdelitev napetosti in manj izrazite koncentracije napetosti, kar zavira rast razpok.

Pri interpretaciji rezultatov je treba upoštevati tudi obseg raziskave. Vpliv temperature je bil obravnavan pri nespremenjenih pogojih izdelave vzorcev, zato dobljenih parametrov utrujanja ni mogoče neposredno posplošiti na druge orientacije tiskanja, deleže ali vzorce polnila oziroma druge procesne parametre 3D-tiskanja. Ker lahko orientacija tiskanja, geometrija in razporeditev polnila ter procesni parametri pomembno vplivajo na anizotropijo, mehanske lastnosti in iniciacijo utrujenostnih poškodb, bi njihovo sistematično spreminjanje predstavljalo smiselno nadaljevanje raziskave. Predstavljeni rezultati zato predvsem opredeljujejo temperaturno odvisnost obnašanja 3D-natisnjenega PEEK-a pri utrujanju pri izbranih pogojih izdelave in jih je treba pri uporabi v drugih pogojih ustrezno upoštevati.

Splošno rezultati potrjujejo, da temperatura pomembno vpliva na obnašanje 3D-natisnjenega PEEK-a pri dinamskih obremenitvah, pri čemer višje temperature zmanjšujejo togost in nosilnost, hkrati pa lahko lokalno izboljšajo odpornost v območju nizkih napetosti.

4 Zaključki

V prispevku smo obravnavali vpliv temperature na vibracijsko utrujanje 3D-natisnjenih PEEK struktur. Predstavljen je bil eksperimentalno-numerični pristop, ki omogoča določanje dobe trajanja in identifikacijo parametrov utrujanja na podlagi frekvenčne analize. Ugotovljeno je

bilo, da z višanjem temperature lastna frekvenca pada, manjša pa se tudi odpornost materiala na vibracijsko utrujanje, medtem ko se razmernik dušenja povečuje. Rezultati S-N krivulj kažejo izrazito temperaturno odvisnost obnašanja, pri čemer imajo vzorci pri nizkih temperaturah višjo odpornost, pri povišanih pa pride do mehčanja materiala.

Literatura

- [1] Ansys. Solid186 element description, 2026. [ogled: 11. 6. 2026].
- [2] T. Dirlik and D. Benasciutti. Dirlik and Tovo-Benasciutti spectral methods in vibration fatigue: A review with a historical perspective. *Metals*, 11(9), 2021.
- [3] Y. Geng, X. Ma, and X. Yu. Progress on high-performance PEEK material for 3D printing. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 2024.
- [4] A. Greco, A. De Luca, S. Gerbino, G. Lamanna, and R. Sepe. Influence of infill pattern and layer height on surface characteristics and fatigue behavior of FFF-printed PEEK. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 47(12):4741–4754, 2024.
- [5] Y.-L. Lee. Fatigue damage theories. In *Fatigue Testing and Analysis*, pages 57–76. Butterworth-Heinemann, Burlington, 2005.
- [6] Y.-L. Lee and D. Taylor. Strain-based fatigue analysis and design. In *Fatigue Testing and Analysis*, pages 181–236. Butterworth-Heinemann, Burlington, 2005.
- [7] C.-Y. Liaw, J. W. Tolbert, L. W. Chow, and M. Guvendiren. Interlayer bonding strength of 3D printed PEEK specimens. *Soft Matter*, 17:4775–4789, 2021.
- [8] X. Ling, X. Jing, C. Zhang, and S. Chen. Polyether ether ketone (PEEK) properties and its application status. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 453(1):012080, 2020.
- [9] O. S. Manoukian, N. Sardashti, T. Stedman, K. Gailiunas, A. Ojha, A. Penalosa, C. Mancuso, M. Hobert, and S. G. Kumbar. Biomaterials for tissue engineering and regenerative medicine. In R. Narayan, editor, *Encyclopedia of Biomedical Engineering*, pages 462–482. Elsevier, Oxford, 2019.
- [10] L. W. McKeen. High-temperature polymers. In *The Effect of Creep and Other Time Related Factors on Plastics and Elastomers (Second Edition)*, Plastics Design Library, pages 337–372. William Andrew Publishing, Boston, 2. edition, 2009.
- [11] M. Mršnik, J. Slavič, and M. Boltežar. Frequency-domain methods for a vibration-fatigue-life estimation – Application to real data. *International Journal of Fatigue*, 47:8–17, 2013.
- [12] R. Petrovčič. Vpliv temperature na vibracijsko utrujanje 3D-natisnjenih PEEK struktur. Magistrsko delo, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2025.

- [13] P. Rendas, A. Imperadeiro, R. F. Martins, and B. A. R. Soares. High-cycle fatigue behaviour of polyetheretherketone (PEEK) produced by additive manufacturing. *Polymers*, 16(1), 2024.
- [14] T. Santos. fatiguepy 2.3.2. [ogled: 11. 6. 2026].
- [15] SciPy. scipy.signal.welch. [ogled: 11. 6. 2026].
- [16] N. Sharma, S. Aghlmandi, S. Cao, C. Kunz, P. Honigmann, and F. M. Thieringer. Quality characteristics and clinical relevance of in-house 3D-printed customized polyetheretherketone (PEEK) implants for craniofacial reconstruction. *Journal of Clinical Medicine*, 9(9), 2020.
- [17] F. Shuaib, K. Benyounis, and M. Hashmi. Material behavior and performance in environments of extreme pressure and temperatures. In *Reference Module in Materials Science and Materials Engineering*. Elsevier, 2017.
- [18] J. Slavič, Š. Bolka, and L. Knez. Višja dinamika: laboratorijske vaje. [ogled: 11. 6. 2026].
- [19] M. Tafaoli-Masoule, M. Shakeri, S. A. Zahedi, and M. R. Vaezi. Experimental investigation of process parameters in polyether ether ketone 3D printing. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*, 238:267–279, 2022.
- [20] M. Česnik and J. Slavič. Frequency-dependent fatigue properties of additively manufactured PLA. *Polymers*, 16(15), 2024.
- [21] P. Verboven. *Frequency domain system identification for modal analysis*. PhD thesis, Vrije Universiteit Brussel, 2002.
- [22] Q. Xin. Durability and reliability in diesel engine system design. In *Diesel Engine System Design*, pages 113–202. Woodhead Publishing, 2013.
- [23] M. Česnik, J. Slavič, and M. Boltežar. Accelerated vibration-fatigue characterization for 3D-printed structures: Application to fused-filament-fabricated PLA samples. *International Journal of Fatigue*, 171:107574, 2023.



3D-natisnjeni pametni metamateriali v enem procesu

Marko Zupan¹, Janko Slavič¹

Single-Process 3D-Printed Smart Metamaterials

Povzetek. Metamateriali na principu lokalnih resonatorjev učinkovito mirijo vibracije znotraj ozkega frekvenčnega območja, odvisnega od zasnove metamateriala. V tem delu je predstavljen 3D-natisnjen toplotno-aktiven, samozavedni metamaterial, ki omogoča prilagodljivost pasovno zavrnitvenega filtra za učinkovito delovanje metamateriala v spremenljivih delovnih pogojih. Večmaterialni 3D-tisk omogoča vključitev prevodnih poti v vzmeti osnovne metamaterialne celice, kar omogoča sočasno samozavedno in toplotno-aktivno funkcijo. Joulovo segrevanje ob dovedenem toku na prevodne poti v vzmeteh omogoča prilagodljivost frekvenčnega območja pasovno zavrnitvenega filtra, doseženo preko znižanja togosti materiala in posledično lastne frekvence osnovne metamaterialne celice. Modularna zasnova pametnega metamateriala pa dalje omogoča hitro prostorsko razširljivost na večje enote, brez izgube funkcionalnosti metamateriala.

Abstract. Locally resonant metamaterials effectively attenuate mechanical vibrations in a narrow frequency band, affected by the metamaterial design. This research presents the 3D-printed thermo-active, self-aware metamaterial, with tunable band-gap for effective performance in variable operational conditions. The metamaterial is enabled by multi-material 3D-printing process, integrating conductive paths inside beam-like springs of the unit metamaterial cell, thus enabling simultaneous self-aware and thermo-active functionality. Joule heating, activated by the electrical current in conductive paths, promotes material stiffness variations, reducing the natural frequency of the unit metamaterial cell and affecting the band-gap. Additionally, the modular design of the metamaterial ensures scalability of the metamaterial without performance loss.

1 Uvod

Sodobne rešitve na področjih kot so vesoljska tehnika, avtomobilska industrija, medicina in robotika, so vse pogostejše zaželenne inženirske rešitve, ki združujejo mehanske, senzorne in ak-tuatorske funkcije. Termoplastično ekstrudiranje materiala (TME) je tehnika 3D-tiska, ki se je uveljavila kot primarno orodje za tisk rešitev, ki vključujejo kombinacijo mehanskih, sen-zornih [7] in ak-tuatorskih funkcij [8], in omogoča izdelavo v enem procesu, brez potrebe po

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

datnih obdelavah po 3D-tisku ali vključevanju zunanjih namenskih senzornih ali elektronskih komponent. Pametne funkcionalnosti temeljijo na 3D-tisku električno prevodnih poti [3], ki omogoča piezouporovni [1], tribo-električni [4] in kapacitivni [9] učinek. Nedavne raziskave se osredotočajo na sočasni 3D-tisk pametnih funkcionalnosti v inženirske rešitve, kot so prilagodljivi metamateriali [5].

Metamateriali so skupina skrbno načrtovanih struktur, ki izkazujejo lastnosti, ki jih osnovni material v naravi ne, kot so npr. negativni Poissonov količnik, negativni koeficient temperaturnega raztezka, prilagodljiva togost in negativna dielektričnost. Na področju strukturne dinamike, kjer nas zanimajo predvsem rešitve za zmanjševanje ravni mehanskih vibracij in hrupa, se metamateriali izkažejo za učinkovite tako v nizko-, kot tudi v visoko-frekvenčnem območju. Eden izmed temeljnih mehanizmov za nizko-frekvenčno mirjenje valovanj so lokalni resonatorji (LRM) [2, 12], kjer je mirjenje valovanj doseženo preko dinamike pod-resonančnih resonatorjev, nameščenih na metamaterial [6]. Uporabnost LRM struktur je omejena z ozko-frekvenčnim oknom učinkovitega mirjenja vibracij, pasovno zavrnitvenim filtrom (PZF), določenim z dinamiko lokalnih resonatorjev. Nedavne raziskave so se osredotočale na prilagodljivost PZF z uporabo piezoelektričnih, elektro-dinamskih, magnetnih in temperaturno-odvisnih učinkov za aktivno prilagajanje togosti strukture in dinamike lokalnih resonatorjev.

V tem delu je predstavljen termo-aktivni, samozavedni LRM metamaterial, 3D-natisnjen v enem procesu z modularno zasnovo za hitro prostorsko razširljivost. V poglavju 2 so predstavljene temeljne teoretične osnove, čemur sledi zasnova metamateriala in postopek 3D-tiska v poglavju 3. V poglavju 4 so nato predstavljeni eksperimentalni rezultati, in na koncu v poglavju 5 zaključki.

2 Teoretične osnove

V tem poglavju so predstavljene teoretične osnove, potrebne za razumevanje delovanja predlaganega metamateriala. Najprej so opisani LRM metamateriali, sledi piezouporovni učinek, ki omogoča samozavedno funkcionalnost. Na koncu je opisana Joulova toplota, ki omogoča termo-aktivno prilagajanje dinamike metamateriala.

2.1 Metamateriali z lokalnimi resonatorji

Mirjenje elastičnih valov v LRM dosežemo z preprečevanjem širjenja valovanj čez strukturo v določenih frekvenčnih območjih, imenovanih pasovno zavrnitveni filter (PZF), odvisnih od osnovne metamaterialne celice in nanjo nameščenega lokalnega resonatorja. Pogoji za nastanek PZF je:

$$f_{\text{res}} < f_{\lambda/2}, \quad (1)$$

kjer je f_{res} lastna frekvenca lokalnega resonatorja in $f_{\lambda/2}$ pa frekvenca povezana z Braggovo interferenco [2]. Učinkovitost mirjenja je pogojena predvsem z masnim razmerjem r_m [2]:

$$r_m = m_{\text{res}}/m_{\text{base}}, \quad (2)$$

kjer je m_{res} masa lokalnega resonatorja in m_{base} masa osnovne celice metamateriala. Lastna frekvenca f_{res} vpliva na položaj PZF v frekvenčnem spektru, medtem ko masno razmerje r_m vpliva na frekvenčno širino PZF.

2.2 Piezouporovni učinek

Piezouporovni učinek opisuje spremembo električne upornosti materiala, ko nanj deluje mehanska obremenitev. Piezouporovnost je bila raziskana v kovinah [11], polprevodnikih [10] in tudi prevodnih polimernih kompozitih [1]. Ob pravilni zasnovi prevodnih poti in 100% polnilu, uporaba prevodnih kompozitov v 3D-tiskanih strukturah omogoča meritev mehanskih obremenitev:

$$d\rho_i/\rho_{0i} = \xi_{ij}\varepsilon_j, \quad i, j = 1, \dots, 6, \quad (3)$$

kjer je $d\rho_i$ komponenta upornosti, ρ_{0i} statična upornost v neobremenjenem stanju, ξ_{ij} so piezouporovni koeficienti in ε_j deformacijski tenzor.

2.3 Joulova toplota

Joulova toplota je pojav, kjer prihaja do sproščanja toplote v električnih komponentah ob prisotnosti električnega toka, in ga lahko uporabimo za aktivno prilagajanje lastnosti metamateriala, preko spremembe modula elastičnosti s temperaturo. Ob napajanju z enosmernim tokom velja:

$$Q = RI^2 = UI, \quad (4)$$

kjer je Q proizvedena toplota, R električna upornost komponente, I električni tok skozi komponento in U padec napetosti na električni komponenti.

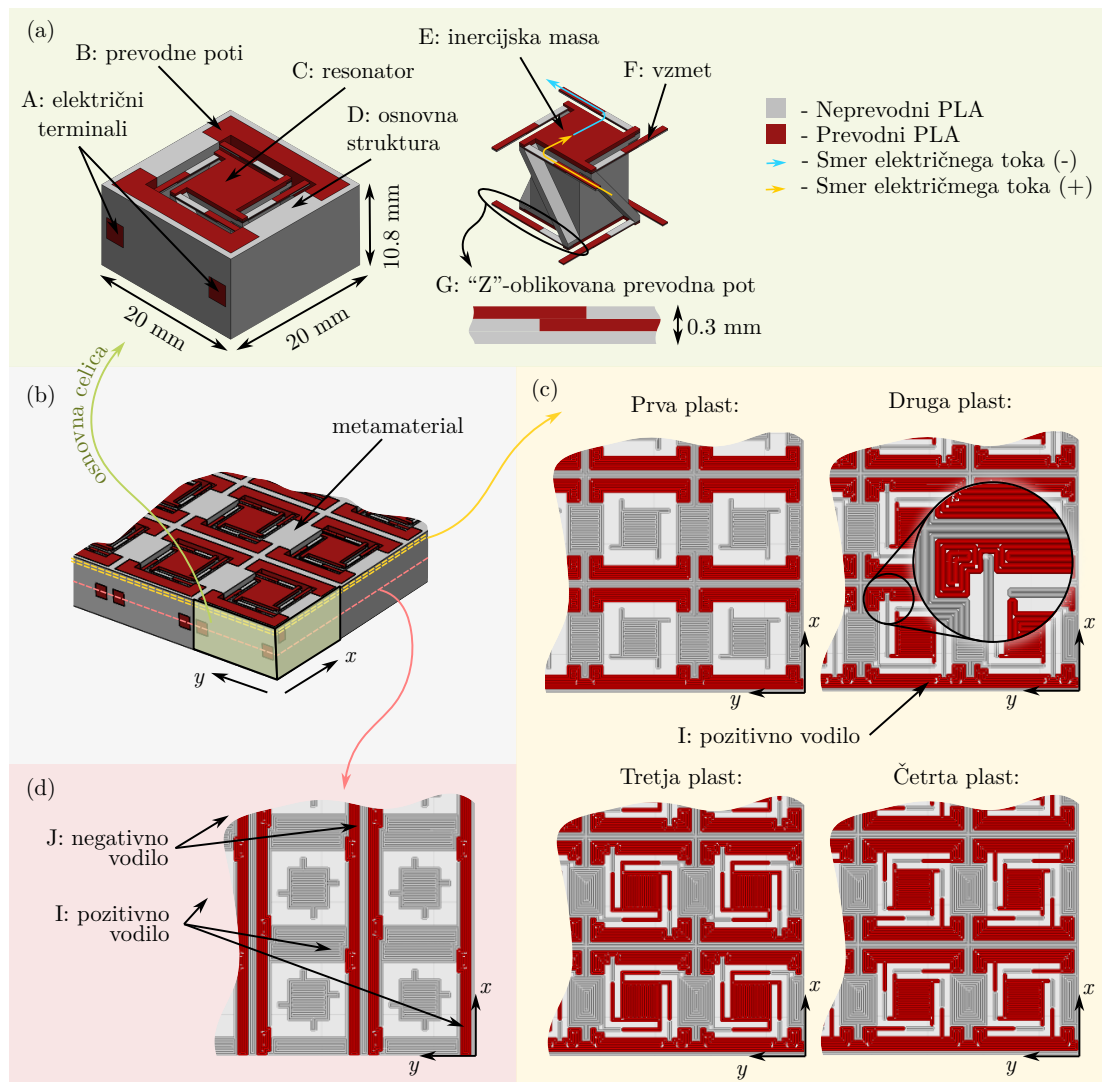
3 3D-natisnjeni metamateriali v enem procesu

V tem poglavju sta predstavljeni zasnova metamateriala in njegova izdelava z enoprocenim 3D-tiskom. Najprej je opisana geometrija osnovne celice in arhitektura prevodnih vodil, ki zagotavlja prostorsko razširljivost in sočasno polno ohranitev funkcionalnosti strukture. Sledi opis parametrov tiska in priprave metamateriala za eksperimentalno ovrednotenje.

3.1 Zasnova metamateriala

Metamaterial temelji na osnovni celici [5], prikazani na sliki 1a. Osnovna celica je sestavljena iz osnovne strukture (D) in resonatorja (C). Resonator je sestavljen iz inercialne mase (E), vpete v osnovno strukturo prek štirih vzmeti (F), ki vključujejo “Z-oblikovano” prevodno pot (G), ki hkrati služi kot grelni element in piezouporovno zaznavalo.

Metamaterial je zaradi skalirnosti zasnovan modularno v obsegu 9×9 osnovnih celic. Vsaka metamaterialna celica je električno kontaktirana preko sistema pozitivnih (I) in negativnih (J) vodil, razvidnih iz slik 1c in 1d, na katerih so prikazane različne plasti pripravljene razrezane g-kode za 3D-tisk. Tak sistem električnih vodil vse metamaterialne celice veže v vzporedno vezavo in s tem zagotavlja enakomerno porazdelitev moči in enak padec napetosti na vseh metamaterialnih celicah. Povečan prečni prerez vodil minimizira električno upornost vodil in s tem lokalizira Joulovo segrevanje v vzmeti, kjer “Z”-oblikovane poti neposredno uravnavajo togost resonatorja.



Slika 1: Zasnova pametnega metamateriala za 3D-tisk v enem procesu: (a) Osnovna metamaterialna celica z vsemi sestavnimi deli, (b) sekcijski prikaz metamaterialnega modula z označenimi prereznimi ravninami, (c) prikaz g-kode za zgornjo prerezno ravnino in (d) prikaz g-kode za spodnjo prerezno ravnino.

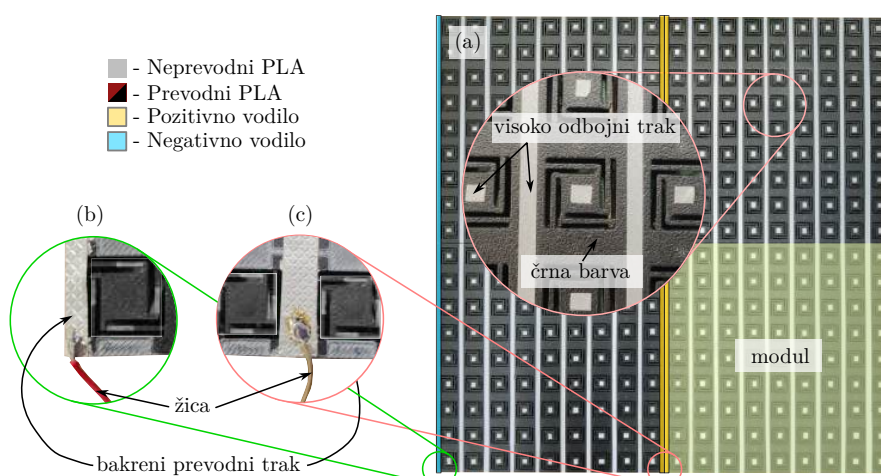
3.2 3D-tisk metamateriala

Metamaterial je bil 3D-natisnjen s tiskalnikom BambuLab P1S z večmaterialnim sistemom AMS brez uporabe podpornega materiala. Uporabljena sta bila grafenov PLA filament (Protoplant Inc., ZDA) za prevodne poti, in mat PLA filament (Plastika Trček d.o.o.) za ostalo strukturo. G-koda je bila pripravljena v programu Bambu Studio 2.0.0.95 s 100 % gostoto zapolnjenosti. Ostali ključni parametri tiska so zbrani v preglednici 1.

Preglednica 1: Parametri 3D-tiska.

Parameter	Prevoden PLA	Neprevoden PLA
Višina plasti – osnova [mm]	0,28	0,28
Višina plasti – vzmeti [mm]	0,1	0,1
Hitrost tiskanja [mm/s]	80	200
Širina ekstruzije [mm]	0,45	0,45
Temperatura šobe [°C]	220	220
Ekstruzijski množitelj	1,00	0,97

Po tisku je bil metamaterial v namen boljše absorpcije svetlobe pri meritvi z IR termo kamero pobarvan s črno akrilno barvo, nato pa je bil na metamaterial v linijski vzorec nalepljen visoko odbojni trak za meritev odziva strukture z laserskim vibrometrom (glej sliko 2a). Električni kontakt s strukturo je bil vzpostavljen na robnem negativnem (glej sliko 2b) in pozitivnem vodilu (glej sliko 2c): najprej je bil na izpostavljeni del vodila nanešen tanek sloj električno prevodne srebrne barve (Electrolube, Zduženo Kraljestvo), na katerega je bil nato prilepljen sloj bakrenega traku s prispajkano lahko žico. Na enak način je bila električno konaktirana tudi metamaterialna celica na lokaciji $P = (-30, 10)$ mm v namen ovretnotenja samozavedne funkcionalnosti metamateriala.



Slika 2: (a) 3D-natisnjen metamaterial, pripravljen na eksperimentalne meritve. Električni kontakt na (b) negativnem vodilu in (c) pozitivnem vodilu.

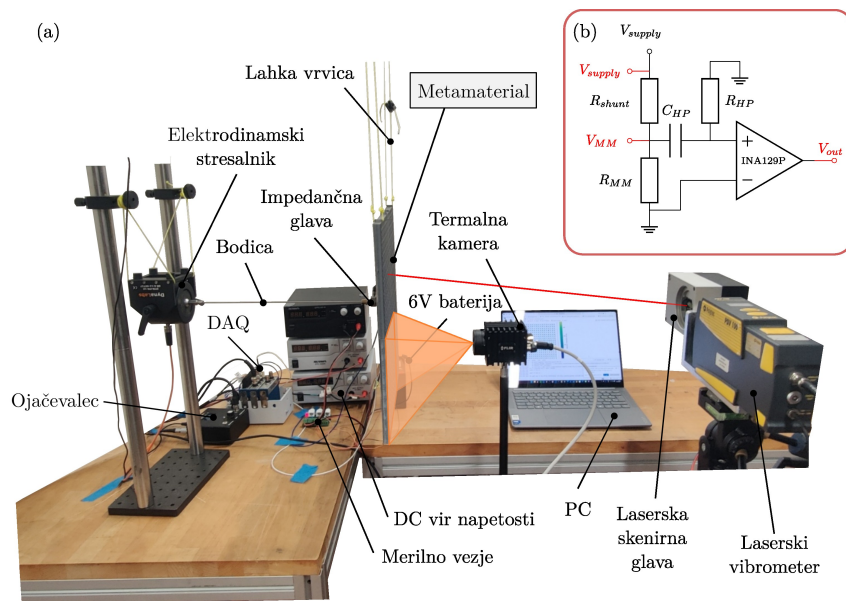
4 Eksperimentalno delo

V tem poglavju sta opisani eksperimentalna postavitve in rezultati ovrednotenja termo-aktivne in samozavedne funkcionalnosti metamateriala.

4.1 Postavitev eksperimenta

Slika 3a prikazuje eksperimentalno postavitev za ovrednotenje aktivne in samozavedne funkcionalnosti metamateriala. Prosti robni pogoji vpetja so bili doseženi z vpetjem metamateriala preko dveh dolgih tankih vrvic. Mehanski odziv strukture je bil točkovno izmerjen z laserskim vibrometrom PDV100 (Polytec Holding AG, Avstrija), vodenim z lasersko skenirno glavo. Struktura je bila vzbujaana s sinusnim preletom med 35 in 500 Hz z amplitudo pospeška 1 g z elektrodinamskim stresalnikom PM-10 (DynaLabs, Turčija). Sila in pospešek v točki vzbujaanja sta bili zajeti z impedančno glavo PCB 288D01 (PCB Piezotronics Inc., ZDA), termičen odziv pa z infrardečo kamero A50 (Teledyne FLIR LLC., ZDA).

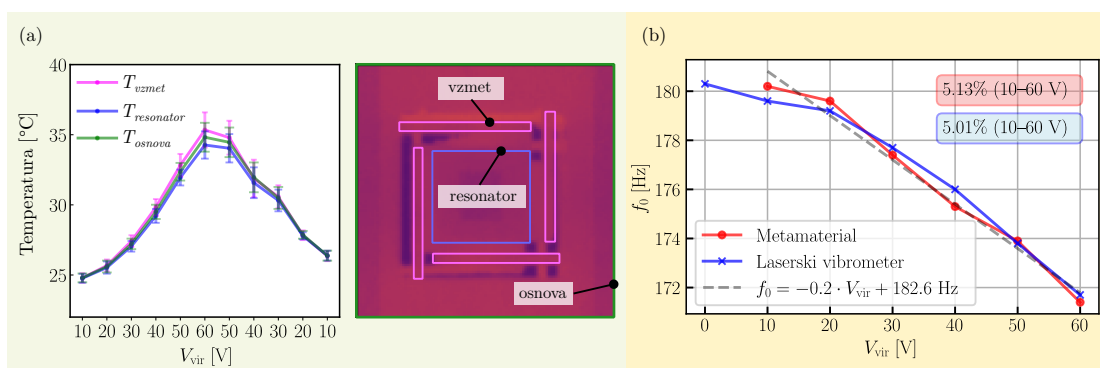
Električni odziv strukture – dinamična komponenta upornosti – je bil izmerjen z delilnikom napetosti (glej sliko 3b) z nizkofrekvenčnim RC filtrom in operacijskim ojačevalnikom signala (faktor ojačanja $G = 51$). Meritve so bile izvedene pri električnih napetostih med 10 V in 60 V s korakom 10 V in desetminutnimi premori med zaporednimi meritvami za termično stabilizacijo strukture.



Slika 3: (a) Postavitev za eksperimentalno ovrednotenje metamateriala. (b) Električni diagram za uporabljeno merilno vezje.

4.2 Rezultati

Eksperimentalno sta bili ovrednoteni obe funkcionalni lastnosti metamateriala: termo-aktivna nastavljalivost lastne frekvence in samozavednost. Predpogoj za enakomerno prilagajanje di-



Slika 4: Rezultati eksperimentalnega dela. (a) Statistična karakterizacije termičnega odziva 48 naključno izbranih centralnih celic metamateriala. (b) Odvisnost prve lastne frekvence f_0 od napajalne napetosti; f_0 izmerjena z laserskim vibrometrom in piezouporovnim samozavednim zaznavalom.

namike resonatorjev je temperaturna homogenost po celotnem modulu.

Slika 4a prikazuje statistično karakterizacijo temperaturnega odziva 48 naključno izbranih centralnih celic. Standardna deviacija temperature pri električni napetosti 60 V je znašala $\sigma = 1,3\text{ }^{\circ}\text{C}$, kar potrjuje, da arhitektura prevodnih vodil zagotavlja zadostno enakomerno termično aktivacijo po celotnem modulu. Iz temperaturnega polja je razvidno, da se poleg vmzeti sočasno segreva tudi osnovna struktura celice, kar je stranski in nezaželen pojav, saj segrevanje osnovne strukture ne prispeva k nastavljanju togosti resonatorja. Kljub temu izmerjeni dinamični odziv (slika 4)b potrjuje pravilno termomehansko delovanje metamateriala.

Slika 4b prikazuje odvisnost prve lastne frekvence f_0 , določene iz dinamičnega odziva meritev tako laserskega vibrometra kot dinamične komponente upornosti iz piezouporovnega zaznavala metamaterialne celice na lokaciji $P = (-30, 10)\text{ mm}$. Obe meritvi kažeta znižanje f_0 za približno 5 % znotraj območja 10–60 V, kar potrjuje, da termično prilagajanje togosti vzmeti neposredno uravnava dinamični odziv metamateriala. Samozavedno zaznavalo se tesno ujema z meritvijo vibrometra ($R^2 = 0,985$), kar potrjuje sposobnost metamateriala, da brez zunanjih zaznaval v realnem času spremlja lastno dinamiko.

5 Zaključki

Predstavljen je bil termo-aktivni, samozavedni metamaterial z lokalnimi resonatorji za mirjenje vibracijskega odziva, v celoti 3D-natisnjen v enem procesu. Predlagana modularna arhitektura s sistemom prevodnih vodil omogoča prostorsko razširitev funkcionalnih lastnosti osnovne metamaterialne celice. Eksperimentalna karakterizacija metamateriala z 18×18 celic je pokazala:

- homogeno temperaturno polje po modulu ($\sigma = 1.3\text{ }^{\circ}\text{C}$ pri 60 V);
- spremembo lastne frekvence resonatorjev za 5 % v območju napetosti 10–60 V;
- zanesljivo piezouporovno samozavedno zaznavanja brez uporabe zunanjih zaznaval ($R^2 = 0.985$).

Sprememba lastne frekvence (5 %) je znotraj merilne ločljivosti zanesljivo zaznana, vendar za zahtevnejše aplikacije razmeroma skromna; širši razpon prilagoditve bi zahteval nadaljnjo optimizacijo geometrije vzmeti oz. izbiri materiala z izrazitejšo temperaturno odvisnostjo togosti. Dosežena sočasna prilagodljivost pasovno zavrnitvenega filtra in samozavedna funkcionalnost ter modularna zasnova omogočajo nadaljnji razvoj prilagodljivih LRM struktur z zaprtozančnim krmiljenjem dinamičnega odziva.

Literatura

- [1] M. Arh, J. Slavič, and M. Boltežar. Experimental identification of the dynamic piezoresistivity of fused-filament-fabricated structures. *Additive Manufacturing*, 36:101493, 2020.
- [2] C. C. Claeys, K. Vergote, P. Sas, and W. Desmet. On the potential of tuned resonators to obtain low-frequency vibrational stop bands in periodic panels. *Journal of Sound and Vibration*, 332(6):1418–1436, 2013.
- [3] P. F. Flowers, C. Reyes, S. Ye, M. J. Kim, and B. J. Wiley. 3D printing electronic components and circuits with conductive thermoplastic filament. *Additive Manufacturing*, 18:156–163, Dec. 2017.
- [4] M. Kanik, M. G. Say, B. Daglar, A. F. Yavuz, M. H. Dolas, M. M. El-Ashry, and M. Bayindir. A Motion- and Sound-Activated, 3D-Printed, Chalcogenide-Based Triboelectric Nanogenerator. *Advanced Materials*, 27(14):2367–2376, 2015.
- [5] T. Košir, M. Zupan, and J. Slavič. Self-aware active metamaterial cell 3d-printed in a single process. *International Journal of Mechanical Sciences*, 282:109591, 2024.
- [6] F. Lemoult, N. Kaina, M. Fink, and G. Lerosey. Wave propagation control at the deep subwavelength scale in metamaterials. *Nature Physics*, 9(1):55–60, Jan. 2013. Publisher: Nature Publishing Group.
- [7] M. Palmieri, J. Slavič, and F. Cianetti. Single-process 3D-printed structures with vibration durability self-awareness. *Additive Manufacturing*, 47:102303, Nov. 2021.
- [8] T. B. Palmić and J. Slavič. Design principles for a single-process 3D-printed stacked dielectric actuators — Theory and experiment. *International Journal of Mechanical Sciences*, 246:108128, May 2023.
- [9] C. Shemelya, F. Cedillos, E. Aguilera, D. Espalin, D. Muse, R. Wicker, and E. MacDonald. Encapsulated Copper Wire and Copper Mesh Capacitive Sensing for 3-D Printing Applications. *IEEE Sensors Journal*, 15(2):1280–1286, Feb. 2015.
- [10] C. S. Smith. Piezoresistance Effect in Germanium and Silicon. *Physical Review*, 94(1):42–49, Apr. 1954.
- [11] W. Thomson. II. The Bakerian lecture.—On the electro-dynamic properties of metals. *Proceedings of the Royal Society of London*, (8):50–55, Dec. 1857.

- [12] L. Van Belle, C. Claeys, E. Deckers, and W. Desmet. The impact of damping on the sound transmission loss of locally resonant metamaterial plates. *Journal of Sound and Vibration*, 461:114909, Nov. 2019.



Napovedovanje dolgoročnega obnašanja lesenega nosilca skozi celotno življenjsko dobo

Tomaž Hozjan¹, Urban Rodman² in Sabina Huč³

Predicting the Long-Term Behaviour of a Timber Beam Throughout Its Service Life

Povzetek. V prispevku je predstavljena numerična analiza dolgoročnega reološkega obnašanja lesenega nosilca v obdobju 100 let. Uporabljen je sklopljen vlažnostni in mehanski model, ki upošteva vpliv viskoelastičnih, mehanosorptivnih ter deformacij zaradi krčenja in nabrekanja lesa. Najprej je analiziran vpliv različnih opisov mehanosorptivne deformacije, nato pa še vpliv različnih scenarijev relativne vlažnosti okolja na dolgoročno napoved pomika nosilca. Rezultati kažejo, da imajo poenostavljeni modeli mehanosorpcije majhen vpliv na kratkoročni odziv, medtem ko je za zanesljivo napoved dolgoročnega razvoja pomikov potrebno uporabiti model z več mehanosorptivnimi mehanizmi. Dodatno je pokazano, da ima zgodovina izpostavljenosti relativni vlažnosti pomemben vpliv na akumulacijo deformacij in vrednost deformacijskega faktorja.

Abstract. This paper presents a numerical analysis of the long-term rheological behaviour of a timber beam over a 100-year period. A coupled moisture and mechanical model is employed, accounting for viscoelastic, mechano-sorptive, shrinkage and swelling strains. First, the influence of different mechano-sorptive formulations on the predicted deflections is investigated, followed by an analysis of the effect of various ambient relative humidity scenarios on the long-term response of the beam. The results show that simplified mechano-sorptive models provide satisfactory predictions for short-term behaviour, whereas a model incorporating multiple mechano-sorptive mechanisms is required for reliable long-term predictions. Furthermore, the study demonstrates that the moisture exposure history significantly affects the accumulation of deformations and the resulting deformation factor.

1 Uvod

Obnašanje lesenih konstrukcijskih elementov se s časom spreminja zaradi reoloških lastnosti lesa. V lesenem konstrukcijskem elementu, obremenjenem z zunanjo mehansko obtežbo, se v konstantnih pogojih okolja s časom razvijejo viskoelastične deformacije. Če so deformacije lesenega elementa preprečene, pride s časom do relaksacije napetosti. V spreminjajočih se

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

² Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

pogojih okolja, kjer se s časom spreminjata temperatura in/ali relativna vlažnost (RH) zraka, je napetostno-deformacijsko stanje lesenega konstrukcijskega elementa poleg začetnih elastičnih in časovno-odvisnih viskoelastičnih deformacij odvisno tudi od deformacij zaradi krčenja in nabrekanja, mehanosorptivnih deformacij ter temperaturnih deformacij. Slednje so bistveno manjše od ostalih deformacij, zato jih v mehanski analizi lesenih konstrukcijskih elementov običajno zanemarimo. Elastične deformacije lahko določimo s kratkotrajnimi statičnimi testi, viskoelastične deformacije z dolgoročnimi testi v konstantnih pogojih okolja, deformacije zaradi krčenja in nabrekanja na majhnih vzorcih lesa, mehanosorptivnih deformacij pa ni mogoče ločiti od ostalih deformacij, da bi jih eksperimentalno določili [1]. Zato dolgoročno obnašanje lesenih konstrukcijskih elementov določamo z eksperimenti ali numeričnimi modeli, pri čemer spremljamo časovni potek celotne deformacije.

Eksperimentalni rezultati dolgoročnega mehanskega obnašanja lesa so večinoma predstavljeni za kratka časovna obdobja (manj kot eno leto) in majhne vzorce [1], [2], [14]. Dokumentirani eksperimentalni rezultati mehanskega odziva lesenih konstrukcijskih elementov za daljša časovna obdobja, do deset let, so še redkejši [3]-[5]. Komplementarno z eksperimentalnimi raziskavami se razvijajo tudi numerični modeli za napovedovanje dolgoročnega odziva lesenih konstrukcijskih elementov. Ker so materialni parametri v numeričnih modelih umerjeni s pomočjo eksperimentalnih rezultatov, so tudi numerični rezultati mehanskega odziva lesenih elementov predstavljeni za krajša časovna obdobja, največ do deset let [6]-[9].

Projektna življenjska doba lesenih konstrukcijskih elementov, ki je skladno z Evrokodom [10] 50 let, je bistveno daljša od razpoložljivih eksperimentalnih in numeričnih rezultatov. Poleg tega je v zadnjem času vedno več prizadevanj za zmanjšanje negativnih vplivov gradbenih konstrukcij na okolje, pri čemer se razvijajo principi krožne ekonomije, ki spodbujajo podaljšanje življenjske dobe produktov in njihovo ponovno uporabo [11]. Ker je življenjska doba lesenih konstrukcijskih elementov odvisna od zgodovine izpostavljenosti mehanski obtežbi ter temperaturnim in vlažnostnim pogojem okolja, se za preučitev možnosti podaljšanja življenjske dobe (> 50 let) ali ponovne uporabe konstrukcijskega elementa lahko uporabijo numerični modeli.

V tem prispevku prikazujemo uporabo numeričnega vlažnostnega in mehanskega modela za napovedovanje mehanskega obnašanja lesenega nosilca v obdobju 100 let. Na primerih prikazujemo vpliv spreminjajoče se relativne vlažnosti okoliškega zraka na mehanski odziv nosilca. Numerične rezultate primerjamo med seboj in z deformacijskim faktorjem, ki je podan v [12]. Dodatno analiziramo tudi časovni razvoj prispevkov elastičnih, viskoelastičnih in mehanosorptivnih deformacij, deformacij zaradi krčenja in nabrekanja lesa ter napetosti v najbolj obremenjenih točkah analiziranega nosilca.

2 Metodologija

Za napoved dolgoročnega reološkega obnašanja lesenega nosilca v obdobju 100 let najprej izvedemo vlažnostno analizo, s katero določimo vsebnost vlage po prečnem prerezu nosilca. Ta se s časom spreminja zaradi spreminjajočih se vlažnostnih pogojev okolja nosilca. Izračunane vsebnosti vlage nato upoštevamo kot vhodni podatek v mehanski analizi nosilca, ki jo izvedemo z linijskim mehanskim modelom nosilca. V nadaljevanju podajamo opis uporabljenega vlažnostnega in mehanskega modela ter prikaz osnovnih enačb.

2.1 Vlažnostni model

Za določitev vsebnosti vlage v lesenem elementu ob spreminjajoči se relativni vlažnosti in konstantni temperaturi okolice uporabimo več-Fickov vlažnostni model [13]. Ta upošteva

prenos vodne pare v celičnih lumnih in prenos vezane vode v celičnih stenah z dvema med seboj povezanima enačbama

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(p_v \frac{\varphi M}{R_g T_s} \right) = \nabla \cdot \left(\mathbf{D}_v \nabla \left(p_v \frac{\varphi M}{R_g T_s} \right) \right) - \dot{c}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial c_b}{\partial p_{vw}} \frac{\partial p_{vw}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{D}_b \frac{\partial c_b}{\partial p_{vw}} \nabla p_{vw} \right) + \dot{c}. \quad (2)$$

V enačbah (1) in (2) sta glavni neznanki delni tlak vodne pare v celičnih lumnih, p_v , in navidezni tlak p_{vw} , ki ustreza koncentraciji vezane vode v celičnih stenah lesa, c_b . Čas je označen s t , molska masa vode z M , temperatura s T_s , univerzalna plinska konstanta z R_g in poroznost lesa s φ . Enačbe (1) in (2) rešujemo numerično s programom COMSOL Multiphysics [15] v kartezijskem koordinatnem sistemu, kjer je operator $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, smeri x , y in z pa sovpadajo z longitudinalno (L), radialno (R) in tangencialno (T) materialno smerjo. Povezovalni člen $\dot{c}$ predstavlja hitrost sorpcije

$$\dot{c} = H_p(p_v - p_{vw}), \quad (3)$$

kjer H_p označuje funkcijo hitrosti reakcije. Diagonalni matriki $\mathbf{D}_v$ in $\mathbf{D}_b$ v enačbah (1) in (2) predstavljata difuzijo vodne pare v celičnih lumnih in vezane vode v celičnih stenah. Vsebnost vlage v lesu, u , je določena kot

$$u = s(u_d - u_a) + u_a, \quad (4)$$

kjer sta z u_a in u_d definirani adsorpcijska in desorpcijska izoterma. Parameter s empirično opisuje notranje sorpcijske krivulje. Podrobnejši opis modela in robni pogoji so podani v [13], [14].

2.2 Mehanski model

Ker je prenos vlage v lesu počasen proces, se v prečnem prerezu nosilca s časom pojavijo vlažnostni gradienti, ki povzročijo mehanosorptivne deformacije ter deformacije zaradi krčenja in nabrekanja lesa. Napetostno stanje nosilca je dodatno odvisno tudi od viskoelastičnih deformacij, ki nastanejo kot posledica zunanje mehanske obtežbe, ki deluje na nosilec v njegovi življenjski dobi. Za izračun dolgoročnega odziva uporabimo linijski model, prikazan v [16], pri čemer so za upoštevanje nelinearnega materialnega obnašanja zveze med deformacijo, napetostjo, vsebnostjo vlage in časom zapisane v inkrementni obliki. Skladno s tem privzamemo tudi aditivni razcep deformacij, pri katerem je prirastek celotne geometrijske deformacije enak vsoti prirastkov mehanskih ($\Delta \epsilon^m$), viskoelastičnih ($\Delta \epsilon^{ve}$), mehanosorptivnih ($\Delta \epsilon^{ms}$) ter deformacij zaradi krčenja in nabrekanja lesa ($\Delta \epsilon^s$)

$$\Delta \epsilon = \Delta \epsilon^m + \Delta \epsilon^{ve} + \Delta \epsilon^{ms} + \Delta \epsilon^s \quad (5)$$

Prirastek mehanske deformacije

Prirastek mehanske deformacije $\Delta \epsilon^m$ je enak vsoti prirastka elastične deformacije $\Delta \epsilon^{el}$ in plastične deformacije $\Delta \epsilon^{pl}$. Mehanski odziv je opisan z bilinearnim napetostno-deformacijskim zakonom. Z večanjem vsebnosti vlage se togost in trdnost lesa zmanjšujeta. Zato sta v modelu modul elastičnosti E in meja tečenja f_y podana kot funkciji vsebnosti vlage

$$\begin{aligned} E(u) &= E_{ref} \left(1 - k_E(u - u_{ref}) \right), \\ f_y(u) &= f_{y,ref} \left(1 - k_y(u - u_{ref}) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

kjer sta E_{ref} in $f_{y,ref}$ modul elastičnosti in meja tečenja pri referenčni vsebnosti vlage u_{ref} , k_E in k_y pa sta redukcijska materialna parametra, ki zajameta vpliv vlage. Opisani model omogoča simulacijo nelinearnega mehanskega odziva lesenih elementov z upoštevanjem vpliva vlage na togost in trdnost ter razvoj nepovratnih plastičnih deformacij. Plastične deformacije so določene skladno s postopki računske plastičnosti po Simo in Hughes [17], ob uporabi izotropnega modela utrjevanja.

Prirastek viskoelastične deformacije

Pri dolgoročni obremenitvi se v lesu razvijejo zakasnele deformacije, ki jih običajno imenujemo deformacije zaradi lezenja. V literaturi obstajajo različni modeli lezenja lesa; tukaj privzamemo model, pri katerem je prirastek deformacije zaradi normalnega lezenja določen z napetostjo na začetku časovnega koraka, časovnim prirastkom in ustreznimi materialnimi parametri modela [2]

$$\Delta \varepsilon^{ve} = \sigma_0 a_1 (e^{-a_2 t_1} - e^{-a_2 t_0}). \quad (7)$$

V zgornji enačbi je σ_0 napetost na začetku časovnega koraka t_0 , t_1 je čas na koncu časovnega koraka, parametra a_1 in a_2 pa sta materialna parametra modela.

Prirastek mehanosorptivne deformacije

Kadar se vsebnost vlage spreminja ob trajni mehanski obremenitvi, v lesenem konstrukcijskem elementu nastane mehanosorpcija, ki povzroči pospešeno lezenje. Prirastek mehanosorptivne deformacije je določen kot vsota prispevkov dveh Kelvin-Voigtovih elementov. Vsak prispevek je odvisen od trenutne napetosti, že akumulirane mehanosorptivne deformacije posameznega elementa ter absolutne spremembe vsebnosti vlage v obravnavanem inkrementu

$$\Delta \varepsilon^{ms} = \sum_{j=1}^2 (J_j^{ms} \sigma - \varepsilon_j^{ms}(t_0)) \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta u}{\mu_j^{ms}} \right) \right], \quad (8)$$

kjer je J_j^{ms} mehanosorptivna podajnost j -tega Kelvin-Voigtovega elementa, σ trenutna napetost, $\varepsilon_j^{ms}(t_0)$ že akumulirana mehanosorptivna deformacija j -tega elementa na začetku časovnega koraka, Δu sprememba vlage v obravnavanem inkrementu in μ_j^{ms} materialni parameter j -tega elementa, ki določa občutljivost razvoja mehanosorptivne deformacije na spremembo vsebnosti vlage.

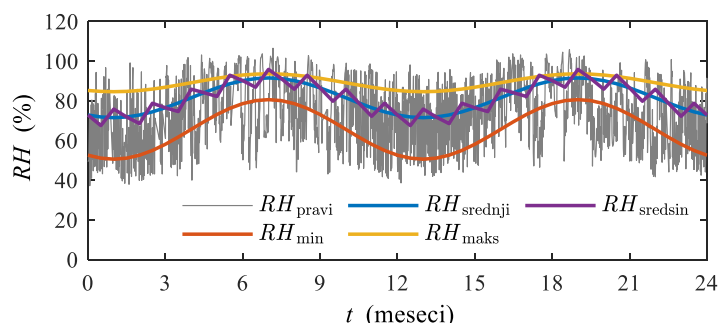
Prirastek deformacije zaradi krčenja in nabrekanja

Deformacija zaradi krčenja in nabrekanja je predpostavljena kot linearna funkcija vsebnosti vlage. Prirastek deformacije zaradi krčenja oziroma nabrekanja je določen s spremembo vsebnosti vlage Δu in koeficientom krčenja α_s v smeri vzporedno z vlakni pri dani konstantni temperaturi

$$\Delta \varepsilon^s = \alpha_s \Delta u. \quad (9)$$

2.3 Obravnavani primer

Obravnavamo prostoležeči leseni nosilec s pravokotnim prečnim prerezom dimenzij 0,05 m/0,10 m in dolžino 1,64 m. Na eni in dveh tretjinah razpona na nosilec delujeta točkovni sili velikosti 1,52 kN. Eksperimentalni in numerični rezultati vsebnosti vlage in pomika obravnavanega nosilca na sredini razpona so prikazani v [16] za obdobje 3,34 oziroma 0,53 leta. V tem prispevku izvedemo 2D vlažnostno analizo pri konstantni temperaturi okolja $T_s = 20^\circ\text{C}$, pri čemer upoštevamo, da je prečni prerez nosilca po vseh robovih izpostavljen spreminjajoči se relativni vlažnosti zraka za obdobje 100 let. Na sliki 1 so za pet scenarijev prikazani vhodni podatki RH v obdobju dveh let, kar je tudi povratna doba kosinusnih krivulj, nato se podatki ponavljajo do 100 let. Amplitude kosinusnih krivulj $RH_{\min}$, RH_{srednji} in RH_{maks} so 15 %, 10 % in 4,5 %, fazni zamik vseh kosinusnih krivulj pa -5 mesecev. Krivulja RH_{sredsin} je seštevek krivulje RH_{srednji} in kosinusne krivulje z amplitudo 5 %, povratno dobo 3 mesece in faznim zamikom -3,375 meseca. Krivulja RH_{pravi} predpostavlja realen scenarij spreminjanja relativne vlažnosti zraka.



Slika 1: Pet scenarijev izpostavljenosti nosilca RH okolja v obdobju dveh let.

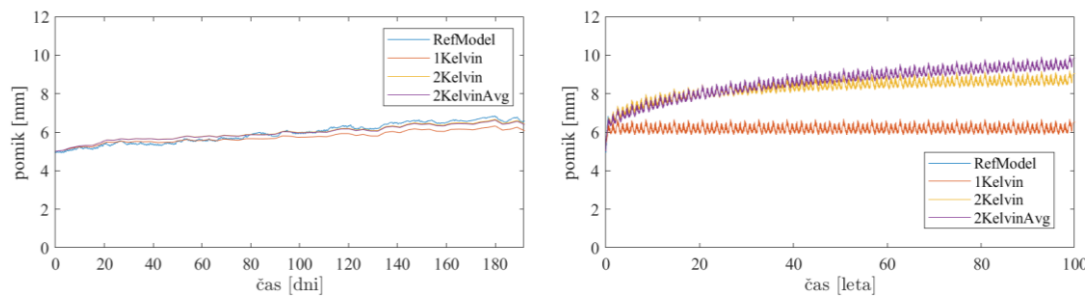
V vlažnostnem modelu so upoštevani difuzijski parametri $D_{0,TT} = D_{0,RR} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ in $\xi_T = \xi_R = 0,03$, začetna vrednost parametra s je 0,5, ostali parametri pa so enaki kot v [18]. Materialni parametri za določitev prirastka mehanskih deformacij (E_{ref} , $f_{y,ref}$, u_{ref} , k_E in k_y) in viskoelastičnih deformacij (a_1 in a_2) ter koeficient krčenja α_s so upoštevani skladno s [16]. Parametri mehanosorptivne podajnosti J_j^{ms} in karakteristične spremembe vlage μ_j^{ms} so izbrani skladno s [6].

3 Rezultati

3.1 Analiza vpliva opisa mehanosorptivne deformacije

V prvi analizi prikazujemo vpliv opisa prirastka mehanosorptivne deformacije na dolgoročni odziv lesnega nosilca, izpostavljenega relativni vlažnosti okolja z oznako RH_{pravi} . Analiziramo tri primere, ki jih primerjamo z referenčnimi numeričnimi rezultati iz literature [16], umerjenimi na eksperimentalne podatke in označenimi kot RefModel. V prvem primeru prirastek mehanosorptivne deformacije opišemo z enim Kelvin-Voigtovim elementom (1Kelvin) v enačbi (3), v drugem in tretjem primeru pa ta prirastek opišemo z dvema Kelvin-Voigtovima elementoma ob upoštevanju različnih parametrov. V prvem (1Kelvin) in drugem (2Kelvin) primeru so parametri izbrani skladno s [6], v tretjem primeru (2KelvinAvg) pa

uporabimo modificirane vrednosti za drugo vzmet in sicer $J_2^{ms} = 7,0 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{kN}$ in $\mu_2^{ms} = 30$. Na sliki 2 so prikazani rezultati razvoja pomika v odvisnosti od časa.

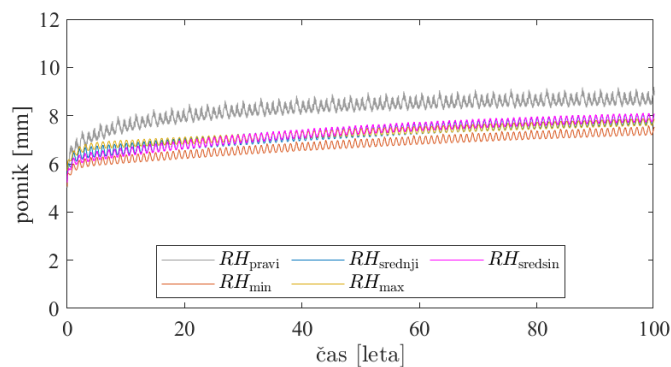


Slika 2: Razvoj pomika s časom, levo za 192 dni, desno za 100 let.

Iz slike 2 je razvidno, da ima izbira modela mehanosorptivne deformacije zanemarljiv vpliv na kratkoročni odziv nosilca, medtem ko bistveno vpliva na napoved dolgoročnega razvoja pomikov. Model 1Kelvin z enim Kelvin-Voigtovim elementom podcenjuje akumulacijo deformacij, medtem ko modela z dvema Kelvin-Voigtovima elementoma izkazujeta bistveno boljše ujemanje z referenčno rešitvijo. Na podlagi teh rezultatov v nadaljevanju prikazujemo rezultate, kjer prispevek mehanosorptivne deformacije opišemo z dvema Kelvin-Voigtovima elementoma (model 2Kelvin) in parametri skladno s [6].

3.2 Dolgoročni odziv pri različnih scenarijih

Na sliki 3 prikazujemo odziv nosilca za pet scenarijev izpostavljenosti relativni vlažnosti okolja (slika 1). Čeprav scenarij $RH_{\min}$ predpostavlja največjo amplitudo nihanja relativne vlažnosti, ne povzroči največjih dolgoročnih pomikov. Poleg tega se izkaže, da je po 100 letih izpostavljenosti relativni vlažnosti $RH_{\min}$, $RH_{\max}$, RH_{srednji} in RH_{sredsin} pomik nosilca primerljiv ne glede na začetno vrednost RH ali amplitudo ter je nižji od pomika pri izpostavljenosti RH_{pravi} . To kaže, da dolgoročnega odziva lesenih konstrukcijskih elementov ni mogoče zanesljivo napovedati zgolj na podlagi poenostavljenih scenarijev RH , temveč je treba upoštevati celotno zgodovino izpostavljenosti RH z večjimi frekvencami in natančnimi amplitudami.



Slika 3: Razvoj pomika s časom za 100 let za različne izpostavljenosti vlagi.

V tabeli 1 so podane vrednosti deformacijskega faktorja k_{def} , izračunanega kot razmerje med razliko pomika po 50 oziroma 100 letih in začetnim pomikom pri času 0 ter začetnim pomikom pri času 0. Izračunane vrednosti k_{def} se med posameznimi scenariji RH razlikujejo. Na primer, pri 50 letih je vrednost k_{def} pri scenariju RH_{maks} 53% nižja od vrednosti k_{def} pri scenariju RH_{pravi} . To kaže, da lahko izbira vlažnostnega scenarija pomembno vpliva na ocenjeno vrednost deformacijskega faktorja in posledično na napoved dolgoročnega odziva konstrukcijskega elementa.

Deformacijski faktor se s časom povečuje v vseh scenarijih, pri čemer je v realnem scenariju RH_{pravi} razlika v deformacijskem faktorju po 50 in 100 letih zanemarljiva (0,03). Izračunana vrednost k_{def} po 50 letih za scenarij RH_{pravi} pa za 20% nižja od vrednosti $k_{\text{def}} = 0,80$, ki je podana v [12] za razred uporabnosti 2.

Tabela 1: Vrednosti deformacijskega faktorja k_{def} po 50 in 100 letih.

	RH_{pravi}	RH_{min}	RH_{srednji}	RH_{maks}	RH_{sredsin}
$k_{\text{def},50 \text{ let}}$	0,64	0,38	0,40	0,30	0,44
$k_{\text{def},100 \text{ let}}$	0,67	0,48	0,50	0,38	0,54

4 Zaključek

V prispevku je predstavljena numerična analiza dolgoročnega obnašanja lesenega nosilca pri različnih scenarijih izpostavljenosti vlagi. Rezultati kažejo, da imajo poenostavljeni modeli mehanosorpcije zadovoljivo napovedno sposobnost pri krajših časovnih obdobjih, medtem ko je za napoved dolgoročnega odziva potrebno uporabiti model vsaj z dvema Kelvin-Voigtovima elementoma. Analiza različnih scenarijev relativne vlažnosti je pokazala, da na akumulacijo deformacij ne vpliva le amplituda nihanja relativne vlažnosti, temveč tudi časovni potek vlažnostnih sprememb. Zaradi omejene razpoložljivosti dolgoročnih eksperimentalnih podatkov ostaja validacija numeričnih modelov za celotno življenjsko dobo lesenih konstrukcij pomemben raziskovalni izziv.

Zahvala

Projekt CRESTIMB je financiran pod okriljem ForestValue2 (Horizon Europe GA št. 101094340). Izraženi pogledi in mnenja so zgolj avtorjevi in ne odražajo nujno stališč ForestValue2. Zanje nista odgovorna niti ForestValue2 niti financer. Izsledke slovenskega dela transnacionalnega projekta je sofinanciralo Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in inovacije Republike Slovenije (Št. pogodbe C3360-24-452017 in Št. NRP 3360-24-0016).

Literatura

- [1] A. Stéphan, P. Perré, C. L'Hostis, R. Rémond, *The fork device: a test for estimating the memory creep of wood under load during moisture variation*, Wood Sci Technol 59:22, 2025.
- [2] S. Srpcič, J. Srpcič, M. Saje, G. Turk, *Mechanical analysis of glulam beams exposed to changing humidity*, Wood Sci Technol 43:9–22, 2009.

- [3] S. Florisson, J. Vessby, S. Ormarsson, *A three-dimensional numerical analysis of moisture flow in wood and of the wood's hygro-mechanical and visco-elastic behaviour*, Wood Sci Technol 55:1269–1304, 2021.
- [4] Y. Nie, H. R. Valipour, T. Ghanbari-Ghazijahani, *Hygro-mechanical analysis of timber-timber composite (TTC) beams in time-dependent environments: A 3D coupled finite element approach*, Structures 71:107380, 2025.
- [5] C. O'Ceallaigh, P. J. McGetrick, T. Walsh, et al., *Creep behaviour and creep recovery of FRP reinforced timber elements*, Wood Mater Sci Eng 20:769–777, 2025.
- [6] M. M. Hassani, F. K. Wittel, S. Hering, H. J. Herrmann, *Rheological model for wood*, Comput Methods Appl Mech Eng 283:1032–1060, 2015.
- [7] D. Konopka, M. Kaliske, *Transient multi-Fickian hygro-mechanical analysis of wood*. Comput Struct 197:12–27, 2018.
- [8] S. Fortino, F. Mirianon, T. Toratti, *A 3D moisture-stress FEM analysis for time dependent problems in timber structures*, Mech Time-Depend Mater 13, 333–356, 2009.
- [9] S. Fortino, P. Hradil, G. Metelli, *Moisture-induced stresses in large glulam beams. Case study: Vihantasalmi Bridge*, Wood Mater Sci Eng 14:366–380, 2019.
- [10] EN 1990:2002–Eurocode: *Basis of structural design*, European Committee for Standardization, 2002.
- [11] N. Ahn, A. Dodoo, M. Riggio, L. Muszynski, L. Schimleck, M. Puettmann, *Circular economy in mass timber construction: State-of-the-art, gaps and pressing research needs*, J Build Eng 53, 2022.
- [12] EN 1995-1-1:2004–Eurocode 5: *Design of timber structures–Part 1-1: general–Common rules and rules for buildings*, European Committee for Standardization, 2004.
- [13] H. L. Frandsen, *Selected constitutive models for simulating the hygromechanical response of wood*, Aalborg University, Denmark, pp 87–104, 2007.
- [14] S. Huč, S. Svensson, T. Hozjan, *Hygro-mechanical analysis of wood subjected to constant mechanical load and varying relative humidity*, Holzforschung, 72(10):863-870, 2018.
- [15] COMSOL AB. *COMSOL Multiphysics® user's guide*, COMSOL AB, Stockholm, Sweden, 2026. Version 6.4.
- [16] T. Hozjan, T. Pazlar, S. Srpčič, *Experimental and numerical analysis of glulam beams in natural climatic conditions*, World Conference on Timber Engineering, Auckland 2012.
- [17] Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1998) *Computational inelasticity*. New York: Springer.
- [18] T. Hozjan, G. Turk, S. Srpčič, S. Svensson, *The effect of changing ambient humidity on moisture condition in timber elements*, World Conference on Timber Engineering, Auckland 2012.



Ohranjanje energije in zagotavljanje zveznosti deformacijskih količin nelinearnih ravninskih nosilcev

Tomaž Plavčak¹, Dejan Zupan¹

Preserving energy and continuity of strain in nonlinear planar beams

Povzetek. V tem članku obravnavamo metodo za dinamično analizo ravninskih nosilcev. Končni elementi temeljijo na interpolaciji hitrosti in kotne hitrosti ob ohranjanju energije. Interpolacijske lastnosti razširimo na odvode višjih stopenj, ki jih uskladimo med sosednjimi končnimi elementi.

Abstract. In this paper we present a method for dynamic analysis of planar beams. Finite elements are based on interpolation of velocities and angular velocities with energy preservation. We expand interpolation properties to interpolate derivatives of higher orders with continuation over the boundaries of finite elements.

1 Uvod

Geometrijsko točni modeli nosilcev bratov Cosserat [2] omogočajo opis poljubno velikih pomikov in zasukov ob majhnih deformacijah. Model je uporaben za številne praktične primere vitkih konstrukcij. Pri numerični obravnavi teh sistemov se srečamo s pomembnim izzivom dolgoročne numerične stabilnosti. Problem se občutno omili z zagotavljanjem ohranjanja energije. Pomembna zveza med hitrostmi deformacij in spremembami hitrosti so enačbe kinematične kompatibilnosti, ki pa se jim ne posveča pretirana mera pozornosti.

Poleg tega standardni končni elementi ne zagotavljajo zveznosti deformacijskih količin preko robov končnih elementov. Ta lastnost zveznega sistema je tako izgubljena z diskretizacijo, čeprav so deformacijske količine ključne za opis deformiranega stanja telesa.

V tem delu predstavimo pristop, ki ohranja energijo, zadosti enačbam kinematične kompatibilnosti in zagotavlja tudi zveznost deformacijskih količin preko robov končnih elementov. To dosežemo na eleganten način z izbiro interpolacije hitrosti, ki vključuje tudi vrednosti odvodov in drugih odvodov. Z upoštevanjem kinematične kompatibilnosti so potem samodejno izpolnjene zveznosti deformacij.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo

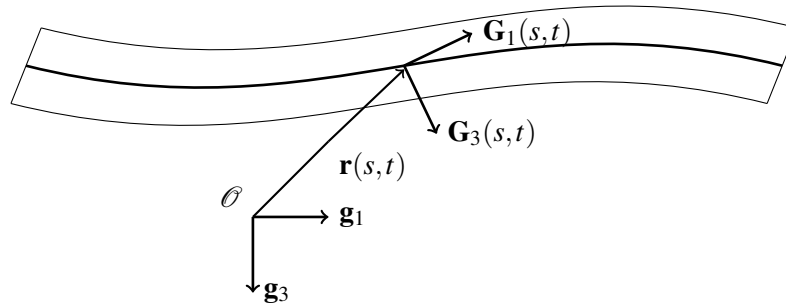
2 Model nosilca

Izhajamo iz modela nosilca po bratih Cosserat [2], pri čemer se v tem članku omejimo na ravninske nosilce. Koordinatni opis prostora določa izhodiščna točka $\mathcal{O}$ in ortonormirana baza $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$. Ta je časovno nespremenljiva in zato imenovana fiksna baza.

Referenčno krivuljo nosilca določa vektorska funkcija $\mathbf{r}(s)$ naravnega parametra s , ki poteka skozi težišča prečnih prereзов. V vsaki točki referenčne krivulje ortonormirana baza

$\{\mathbf{G}_1(s, t), \mathbf{G}_2(s, t), \mathbf{G}_3(s, t)\}$ razpenja ravnino prereza z normalo $\mathbf{G}_1$. Zvezo med opisom količin v posamezni bazi določa ortogonalna transformacija $\mathbf{Q}$.

Privzamemo, da os ravninskega nosilca leži v ravnini, določeni z normalo $\mathbf{g}_2$ in izhodiščno točko $\mathcal{O}$. Privzamemo, da je vektor $\mathbf{G}_2(s, t)$ vselej vzporeden $\mathbf{g}_2$. Tako je transformacija $\mathbf{Q}$ določena zgolj s kotom rotacije ϕ_2 .



Slika 1: Ravninski nosilec.

Količine, izražene v fiksni bazi, transformiramo v lokalno po formuli $\mathbf{G}_i = \mathbf{Q}(\phi_2)\mathbf{g}_i$.

Ravnotežne enačbe ravninskega nosilca so

$$n'_1 + \tilde{n}_1 = \rho A \dot{v}_1, \quad n'_3 + \tilde{n}_3 = \rho A \dot{v}_3, \quad (1)$$

$$m'_2 + \tilde{m}_2 - r'_1 n_3 + r'_3 n_1 = \rho I \dot{\Omega}_2. \quad (2)$$

Pri tem sta n_1 in n_3 notranji sili v fiksni bazi, $\tilde{n}_1$ in $\tilde{n}_3$ zunanji porazdeljeni obtežbi, ρ je specifična masa, A ploščina prečnega prereza, m_2 je upogibni moment v fiksni bazi, $\tilde{m}_2$ porazdeljena momentna obtežba ter I težiščni vztrajnostni moment prereza. Hitrosti označujeta simbola v_1 in v_3 , kotno hitrost pa Ω_2 .

Diferencialne enačbe spremljajo robni pogoji:

$$n_1(0, t) + p_{1,0} = 0, \quad n_3(0, t) + p_{3,0} = 0, \quad (3)$$

$$n_1(L, t) - p_{1,L} = 0, \quad n_3(L, t) - p_{3,L} = 0, \quad (4)$$

$$m_2(0, t) + k_{2,0} = 0, \quad (5)$$

$$m_2(L, t) - k_{2,L} = 0. \quad (6)$$

Količine $p_{i,0}$, $p_{i,L}$, $k_{2,0}$ in $k_{2,L}$ predstavljajo zunanje točkovne sile in momente na robovih.

Kinematične enačbe povezujejo deformacije z lego nosilca. Zapišemo jih lahko v naslednji obliki

$$\Gamma_1 = \cos \phi_2 r'_1 - \sin \phi_2 r'_3 - 1, \quad \Gamma_3 = \sin \phi_2 r'_1 + \cos \phi_2 r'_3, \quad (7)$$

in

$$K_2 = \phi'_2 - \kappa_0, \quad (8)$$

pri čemer je κ_0 začetna ukrivljenost nosilca. Γ_1 označuje osno deformacijo, Γ_3 strižno deformacijo in K_2 ukrivljenost.

Deformacijske količine povežemo z notranjimi silami s konstitucijskimi enačbami

$$N_1 = EA\Gamma_1, \quad N_3 = GA_s\Gamma_3, \quad (9)$$

$$M_2 = EIK_2, \quad (10)$$

kjer je N_1 osna sila, N_3 prečna sila in M_2 upogibni moment, E elastični modul ter G strižni modul materiala. Količine A , A_s in I so geometrijske karakteristike prečnega prereza in sicer ploščina, strižna ploščina in težiščni vztrajnostni moment.

2.1 Vektorsko-matrični zapis enačb

V izpeljavah nadpisana pika ($\dot{}$) označuje odvod po času t , črtica (') pa odvod po naravni koordinati s . Za kompaktnjši zapis enačb vpeljemo vektorsko-matrični opis. V ta namen vpeljemo naslednje vektorje

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_3 \\ m_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_3 \\ \tilde{m}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_3 \\ \phi_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \\ K_2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

pri čemer je $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{v} = [v_1 \quad v_3 \quad \Omega_2]^\top$. Transformacijsko matriko $\mathbf{Q}$ določimo kot

$$\mathbf{Q}(\phi_2) = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Kinematične enačbe potem zapišemo kot

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{Q}(\phi_2)\mathbf{q}' - \mathbf{\Gamma}_0, \quad \mathbf{\Gamma}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \kappa_0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Če kinematične enačbe odvajamo po času, dobimo zveze med časovnimi odvodi deformacij in krajevnimi odvodi hitrosti, ki jih imenujemo kompatibilnostne enačbe;

$$\dot{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{Q}(\phi_2)\dot{\mathbf{q}}' + \dot{\mathbf{Q}}(\phi_2)\mathbf{q}'. \quad (14)$$

Konstitucijske enačbe v matrični obliki določa preprost izraz

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}\mathbf{\Gamma}, \text{ kjer je } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} AE & 0 & 0 \\ 0 & A_s G & 0 \\ 0 & 0 & IE \end{bmatrix} \quad (15)$$

in $\mathbf{f} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{F}$ ter $\mathbf{F} = \mathbf{Q}\mathbf{f}$. Tretji in četrti člen enačbe (2) izvirata iz vektorskega produkta, zato ju lahko izrazimo kot

$$\mathbf{x} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{f} \cdot \mathbf{S}\mathbf{q}', \quad (16)$$

kjer je $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ antisimetrična matrika, ki nadomesti vektorski produkt. Iz osnovnih

lastnosti skalarnega produkta ob upoštevanju enačbe (13) sledi $\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}\mathbf{q}' = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}_0)$, saj je matrika $\mathbf{S}$ neodvisna od koordinatne transformacije $\mathbf{S} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{S}\mathbf{Q}$.

Definiramo še $\boldsymbol{\rho}_{AI} = \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix}$. S temi izrazi se ravnotežne enačbe v vektorski obliki glasijo

$$\mathbf{f}' + \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{f}} - \boldsymbol{\rho}_{AI}\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

V nadaljevanju potrebujemo še odvod transformacijske matrike po času :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} &= \begin{bmatrix} -\dot{\phi}_2 \sin \phi_2 & -\dot{\phi}_2 \cos \phi_2 & 0 \\ \dot{\phi}_2 \cos \phi_2 & -\dot{\phi}_2 \sin \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \dot{\phi}_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \Omega_2 \mathbf{S}\mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (18)$$

Tako lahko enačbo (14) preoblikujemo v ugodnejšo obliko za reševanje

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{\Gamma}} &= \mathbf{Q}\dot{\mathbf{q}}' + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{q}' = \mathbf{Q}\mathbf{v}' + \Omega_2 \mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top (\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}_0) \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{v}' + \Omega_2 \mathbf{S}(\mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma}_0). \end{aligned} \quad (19)$$

3 Diskretizacija enačb

Diskretizacija sledi po viru [6]. Izbrani diskretni čas poudarimo z zgornjim indeksom: za začetek oziroma konec intervala $[t_n, t_n + h]$ uporabimo n oziroma $n + 1$, za vmesni čas pa m . Ravnotežno enačbo (17) diskretiziramo pri vmesnem času v skladu z Lagrangevim izrekom. Spremembo odvoda hitrosti na koncu in začetku časovnega intervala aproksimiramo z vrednostjo funkcije pri vmesnem času:

$$\boldsymbol{\rho}_{AI}(\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) = h(\mathbf{f}'^m + \tilde{\mathbf{f}}^m + \mathbf{x}^m). \quad (20)$$

Enačba (20) je še vedno zvezna nelinearna diferencialna enačba po kraju, kjer za reševanje kot osnovne spremenljivke vzamemo hitrosti $\mathbf{v}^m$ (od tod dalje indeks opuščamo in pišemo $\mathbf{v}$). Vmesne hitrosti izrazimo kot aritmetično sredino vrednosti na robu intervala $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} + \mathbf{v}^n}{2}$. Tudi ostale količine moramo izraziti pri vmesnem času. Za lego uporabimo nastavek $\mathbf{q}^m = \mathbf{q}^n + \frac{h}{2}\mathbf{v}$. Če po Lagrangevem izreku diskretiziramo še kompatibilnostno enačbo (19), dobimo

$$\mathbf{\Gamma}^{n+1} - \mathbf{\Gamma}^n = h(\mathbf{Q}(\phi_2^m)\mathbf{v}' + \Omega_2 \mathbf{S}(\mathbf{\Gamma}^m + \mathbf{\Gamma}_0)) , \quad (21)$$

kjer Ω_2 označuje tretjo komponento hitrosti pri vmesnem času: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3$.

Deformacijske količine ob vmesnem času določimo v skladu z enačbo (13):

$$\mathbf{\Gamma}^m = \mathbf{Q}(\phi_2^m)\mathbf{q}^m - \mathbf{\Gamma}_0 . \quad (22)$$

Za diskretizacijo po kraju privzamemo aproksimacijo hitrosti z nastavkom $\mathbf{v} = \sum_i \mathbf{v}_i \mathcal{B}_i$. Pri tem so $\mathcal{B}_i$ polinomi z interpolacijskimi lastnostmi bodisi v funkcijski vrednosti bodisi v vrednosti odvoda, a le kjer je ta smiselna za interpolacijo. Bistvena lastnost, ki jo baza $\{\mathcal{B}_i\}$ mora imeti, je interpolacija robnih vrednosti za kinematično kompatibilnost sosednjih elementov, preostalo pa je lahko prosto izbrano (če takšna baza obstaja). S tovrstno izbiro diskretizacije smo le korak stran od metode uteženih ostankov. Za testne funkcije privzamemo $\{\mathcal{B}_i\}$ ravnotežne enačbe pa se v šibki obliki glasijo

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i(\mathbf{v}_j) &= \int_0^l (h\mathbf{f}^m + h\tilde{\mathbf{f}}^m + h\mathbf{x}^m - \boldsymbol{\rho}_{AI}(\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n))\mathcal{B}_i ds \\ &= \int_0^l -h\mathbf{f}^m \mathcal{B}_i' + (h\tilde{\mathbf{f}}^m + h\mathbf{x}^m - \boldsymbol{\rho}_{AI}(\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n))\mathcal{B}_i ds + h\mathbf{f}^m \mathcal{B}_i \Big|_0^l = \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (23)$$

Tukaj smo člen $\mathbf{f}^m \mathcal{B}_i$ integrirali po delih, od koder izvira robni člen $\mathbf{f}^m \mathcal{B}_i \Big|_0^l$. Tega nadomestimo z robnimi pogoji zunanje obtežbe $\mathbf{b}_0 \mathcal{B}_i(0)$ in $\mathbf{b}_L \mathcal{B}_i(l)$, kjer je $\mathbf{b}_0 = [p_{1,0} \ p_{3,0} \ k_{2,0}]^\top$ in $\mathbf{b}_L = [p_{1,L} \ p_{3,L} \ k_{2,L}]^\top$.

3.1 Ohranjanje energije

Za zagotovitev ohranjanja energije si oglejmo izraze za kinetično, W_k , in deformacijsko energijo, W_d . Te določata izraza (zveznih količin)

$$W_k = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\rho}_{AI} \mathbf{v} ds \quad (24)$$

ter

$$W_d = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{C}\mathbf{\Gamma} ds . \quad (25)$$

Kadar na element ne deluje zunanja obtežba, velja $W_k^{n+1} - W_k^n = -(W_d^{n+1} - W_d^n)$. Po upoštevanju izbrane diskretizacije, je

$$\begin{aligned}
W_k^{n+1} - W_k^n &= \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{v}^{n+1} \cdot \boldsymbol{\rho}_{AI} \mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n \cdot \boldsymbol{\rho}_{AI} \mathbf{v}^n ds = \int_0^l \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\rho}_{AI} (\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n) ds \\
&= h \sum_i \int_0^l \mathbf{v}_i \mathcal{B}_i \cdot (\mathbf{f}^m + \mathbf{x}^m) ds = h \sum_i \int_0^l \mathbf{v}_i \cdot (-\mathbf{f}^m \mathcal{B}_i' + \mathbf{x}^m \mathcal{B}_i) ds \\
&= h \int_0^l -\mathbf{v}' \cdot \mathbf{Q}^\top (\phi_2^m) \mathbf{F}^m - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_3 (\mathbf{F}^m \cdot \mathbf{S} \mathbf{Q} (\phi_2^m) \mathbf{q}^m) ds \\
&= h \int_0^l -\mathbf{Q} (\phi_2^m) \mathbf{v}' \cdot \mathbf{F}^m - \Omega_2 (\mathbf{S} (\boldsymbol{\Gamma}^m + \boldsymbol{\Gamma}_0)) \cdot \mathbf{F}^m ds \\
&= - \int_0^l (\boldsymbol{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{\Gamma}^n) \cdot \mathbf{F}^m ds.
\end{aligned} \tag{26}$$

Sprememba deformacijske energije je dana z naslednjim izrazom:

$$\begin{aligned}
W_d^{n+1} - W_d^n &= \frac{1}{2} \int_0^l \boldsymbol{\Gamma}^{n+1} \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{\Gamma}^n \cdot \mathbf{C} \boldsymbol{\Gamma}^n ds \\
&= \int_0^l (\boldsymbol{\Gamma}^{n+1} - \boldsymbol{\Gamma}^n) \cdot \mathbf{C} \frac{\boldsymbol{\Gamma}^{n+1} + \boldsymbol{\Gamma}^n}{2} ds.
\end{aligned} \tag{27}$$

Tako iz izrazov (26) in (27) sledi nastavek notranjih sil v lokalni bazi

$$\mathbf{F}^m = \mathbf{C} \frac{\boldsymbol{\Gamma}^{n+1} + \boldsymbol{\Gamma}^n}{2}, \tag{28}$$

ki zagotavlja ohranitev energije. Sile v fiksni bazi potem izvednotimo po izrazu

$$\mathbf{f}^m = \mathbf{Q}^\top (\phi_2^m) \mathbf{F}^m, \tag{29}$$

kar je usklajeno z izpeljavo v enačbi (26).

3.2 Interpolacijska baza

Za željene interpolacijske točke in stopnje odvodov zapišemo skalarni produkt polinomov

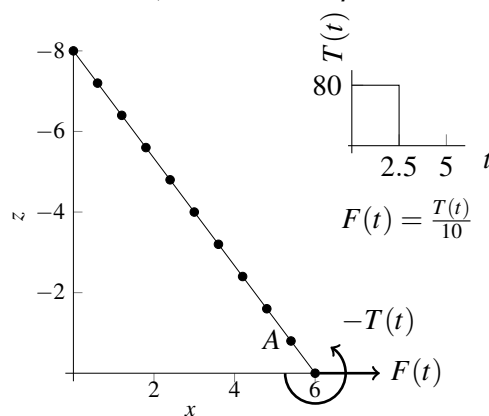
$$\langle p_i, p_j \rangle = \sum_k \frac{\partial^{n_k} p_i}{\partial x^{n_k}}(x_k) \frac{\partial^{n_k} p_j}{\partial x^{n_k}}(x_k) \tag{30}$$

kjer so x_k interpolacijske točke, n_k pa stopnje interpoliranih odvodov. Z Gram–Schmidtovim algoritmom ortogonalizacije poiščemo ortogonalno bazo in iz nje izrazimo interpolacijsko bazo $\{\mathcal{B}_i\}$, ki je prav tako ortogonalna. Tovrstne interpolacijske lastnosti so imenovane po Birkhoffu in so obravnavane v [1] in [4]. Če se za območje interpolacije omejimo na interval $[-1, 1]$, je numerično ugodnejši razvoj po bazi ortogonalnih polinomov za integralni skalarni produkt (npr. Legendrevi, Chebyshevi). Prednosti so oblika baznih polinomov, stabilnejše izvednotenje po rekurzivni formuli in nižje vrednosti koeficientov razvoja po bazi, ki neposredno manjšajo napako skalarnega produkta tj. $\langle \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j \rangle \approx \delta_{ij}$. Za polinome nizke stopnje (približno 10) je standardna baza dobra začetna izbira.

4 Računski primer

Obravnavamo primer prostega nosilca, ki ga obremenimo s silo v smeri x in momentom okoli y . Ta primer je obravnavan v [3] in [5]. Podatki primera so naslednji:

$$EA = GA_s = 10000, \quad \rho A = 1, \\ EI = 100, \quad \rho I = 10.$$



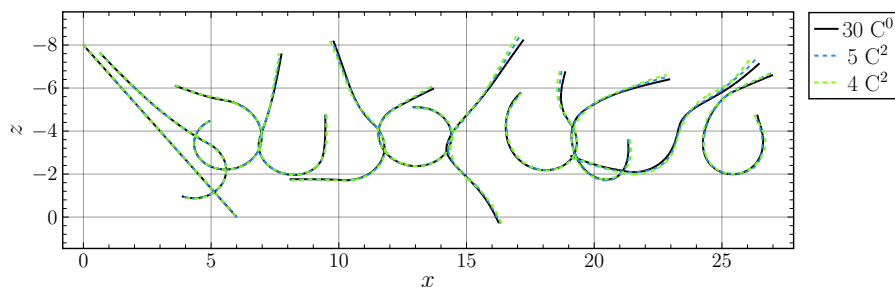
Slika 2: Začetna konfiguracija nosilca (primer z 10 končnimi elementi).

Obtežba deluje na nosilec le prvih 2.5 s, za tem pa sledi prosto gibanje.

Oglejmo si 3 primere različne diskretizacije in interpolacije. Kot referenčno rešitev vzamemo mrežo s 30 končnimi elementi s kubično Lagrangeovo interpolacijo in majhnim časovnim korakom $h = \frac{0.0625}{40}$, ki jo označimo s C^0 . Za primerjavo bomo uporabili mrežo 4 in 5 končnih elementov z interpolacijo funkcijske vrednosti, prvega odvoda ter drugega odvoda; označili jih bomo s C^2 . Časovni korak bo $h = 0.0625$. Pri tem ima referenca 273 prostostnih stopenj, 5 elementov interpolacije C^2 54 ter 4 elementi interpolacije C^2 45 prostostnih stopenj.

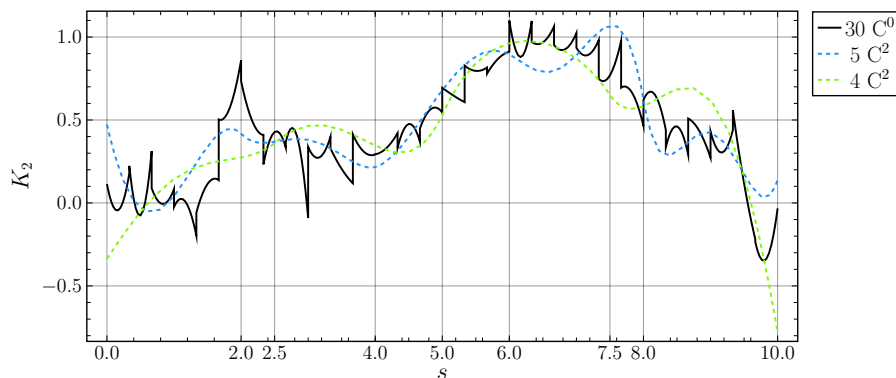


Slika 3: Shematski prikaz interpolacijskih lastnosti končnih elementov z interpolacijo odvodov: točke - funkcijske vrednosti, ravne puščice - odvodi, ukrivljene puščice - drugi odvodi.



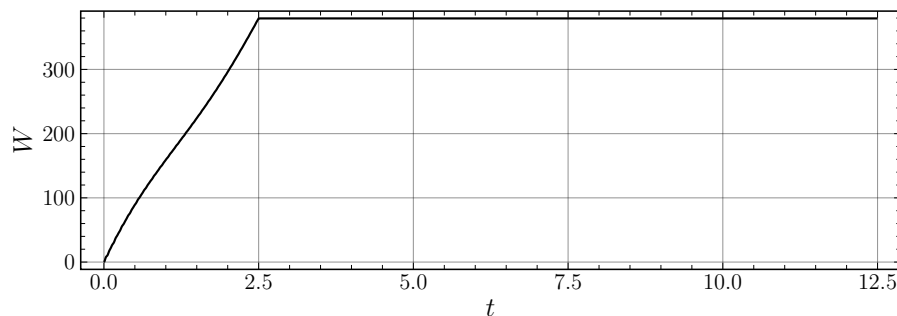
Slika 4: Deformirane lege nosilca pri časovnem koraku 1.25 s do $t = 12.5$ s.

Konfiguracije s štirimi in petimi elementi C^2 se zelo dobro ujemajo z referenčno rešitvijo, kar prikazuje slika 4. Ugotavljamo, da je opis gibanja z alternativno interpolacijo primeren kljub bistveno manjšemu številu prostostnih stopenj.



Slika 5: Potek ukrivljenosti K_2 po kraju ob času $t = 12.5$ s.

Značilnost standardnih elementov je nezveznost deformacij preko robov elementa, kar prikazuje tudi črna krivulja na sliki 5. Z uporabo nastavkov, ki vključujejo tudi višje odvode dosežemo zveznost deformacij, hkrati pa se z manj prostostnimi stopnjami dobro približamo referenčni rešitvi.



Slika 6: Potek celotne mehanske energije s časom.

Ohranjanje energije prikazujemo na sliki 6. Po 2.5 s, ko odstranimo obtežbo, ostaja celotna mehanska energija konstantna.

5 Zaključki

Prikazali smo metodo za dinamično analizo ravninskih nosilcev z interpolacijo hitrosti. Uporabljena diskretizacija zadosti diskretizirani enačbi kinematične kompatibilnosti ter ohranja celotno mehansko energijo konzervativnih sistemov v diskretnih časovnih korakih. Slednje izboljša stabilnost dolgoročnih računov in prepreči nefizikalno naraščanje energije. Z razširitvijo interpolacijske baze hitrosti na odvode višjih stopenj pa dosežemo zveznost deformacijskih količin med elementi, ne da bi morali vpeljati dodatne algebrske vezi.

Literatura

- [1] G. D. Birkhoff. General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 7:107–136, 1906.
- [2] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des Corps Déformables*. A. Hermann et Fils, Paris, 1909.
- [3] M. Gams. *Geometrijsko točna dinamična analiza elastičnih in armiranobetonskih okvirnih konstrukcij : doktorska disertacija*. PhD thesis, M. Gams, 2008.
- [4] I. J. Schoenberg. On Hermite-Birkhoff interpolation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 16(3):538–543, 1966.
- [5] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics of flexible beams under large overall motions—the plane case: Part ii. *Journal of Applied Mechanics*, 53(4):855–863, 12 1986.
- [6] E. Zupan and D. Zupan. On conservation of energy and kinematic compatibility in dynamics of nonlinear velocity-based three-dimensional beams. *Nonlinear Dynamics, Springer*, 95(2):1379–1394, 11 2018.



Uporaba konfiguracijskih sil pri izboljšavi mreže končnih elementov in optimizaciji oblike

M. Kegl¹, B. Harl¹, N. Gubeljak¹ in J. Predan¹

Using configurational forces in improving the finite element mesh and shape optimization

Povzetek. V prispevku obravnavamo možnosti uporabe teorije konfiguracijskih sil v postopkih izboljševanja kvalitete mreže končnih elementov in optimizacije oblike nosilnih mehanskih delov. V ta namen so izpeljane relevantne osnovne enačbe, čemur sledi njihova implementacija v metodo končnih elementov. V okviru dveh enostavnih numeričnih zgledov so predstavljene izhodiščne ideje in način uporabe konfiguracijskih sil v obravnavanem kontekstu. Na osnovi rezultatov je za oba zgleda podana kratka analiza možnih koristi ter numeričnih težav, ki jih bo potrebno rešiti pred implementacijo teh postopkov v praksi.

Abstract. This paper discusses the possibilities of using the theory of configurational forces within the procedures of finite element mesh quality improvement and shape optimization of load-carrying mechanical parts. For this purpose the relevant fundamental equations are derived, which is followed by their implementation into the finite element method. Within the frame of two simple numerical examples, the fundamental ideas and ways of configurational forces utilization in the given context are described. Based on the results obtained in both examples, a short analysis of possible benefits as well as numerical difficulties, which still need to be resolved before practical implementation, is presented.

1 Uvod

Začetke teorije konfiguracijskih sil umeščamo nekako v petdeseta leta prejšnjega stoletja, pri čemer verjetno najpomembnejši mejnik in nekaj začetek teorije predstavlja članek Eshelbya [1]. Do preloma stoletja je teorija doživela intenziven razvoj (opaznejši deli sta na pr. [3], [5]), saj se je izkazala za izjemno koristno pri opisovanju raznih materialnih procesov vezanih na različne vrste nehomogenosti; kot primere lahko navedemo premikanje dislokacij, obnašanje materialnih vključkov in odpiranje razpok v lomni mehaniki (glej na pr. [2], [4]).

Teorija konfiguracijskih sil je torej namenjena študiju procesov, ki na tak ali drugačen način vključujejo razne dejanske fizikalne nehomogenosti. Vendar pa je ne glede na to dejstvo po letu 2000 izšlo nekaj člankov, kjer je so bile predstavljene neke nove možnosti uporabe

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

konfiguracijskih sil na homogenih telesih, torej brez prisotnosti fizikalnih nehomogenosti. Zanimiva prispevka na to temo sta na pr. [6] in [7], kjer je teorija konfiguracijskih sil uporabljena za popravljanje oziroma izboljševanje kvalitete mreže končnih elementov. Gre torej za izboljševanje numeričnega modela obremenjenega homogenega telesa (brez prisotnosti fizikalnih nehomogenosti). Predstavljene ideje so na prvi pogled videti kar zanimive, vendar pa je bila njihova implementacija v naslednjih letih relativno skromna. Uporaba konfiguracijskih sil v tem kontekstu je tako do danes ostala precej omejena, kar se zrcali tudi v relativno majhnem številu publikacij (glej na pr. [8]).

V tem prispevku bomo na kratko pregledali možnosti uporabe konfiguracijskih sil v postopkih optimizacije nosilnih delov v industrijski praksi ter najbolj izpostavljene izzive, ki bi jih bilo potrebno nasloviti. Posledično bomo predpostavili naslednje okoliščine:

- Material je linearno elastičen in izotropen; deformacije lahko merimo s tenzorjem majhnih deformacij.
- Mreža končnih elementov (KE) je relativno velika, uporabljeni elementi pa so linearni tetraedri.
- Vozlišča mreže KE lahko premikamo z namenom izboljševanja kvalitete mreže ter optimizacije oblike.

Ne glede na to, da je ciljni model prostorska mreža sestavljena iz tetraedrov, bodo raziskave v tem prispevku narejene na ravninskih KE. Gre namreč za preliminarno študijo, kjer predpostavljamo, da lahko na problematiko uporabe tetraedrov sklepamo iz problematike uporabe tristraničnih elementov napram sicer ugodnejšim štiristraničnim.

2 Osnovne enačbe

Začnimo z obravnavo nehomogenega hiperelastičnega telesa, pri katerem je prosta energija podana z gostoto deformacijske energije

$$\psi = \psi(u_{i,j}; x_k) \quad (1)$$

Ta je odvisna od gradienta vektorja pomika $u_{i,j}$ (indeks j za vejico pomeni odvod po koordinati x_j), ter eksplicitno tudi od lege x_i materialnega delca; eksplicitna odvisnost ψ od x_i je posledica nehomogenosti v telesu. Napetostni tenzor σ_{ij} je definiran z odvodom proste energije ψ po deformacijskem tenzorju $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$. Ker je razen tega v telesu izpolnjen tudi ravnovesni pogoj, torej veljata enačbi

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2)$$

kjer je f_i vektor volumskih sil (obremenitev), $\sigma_{ij,j}$ pa predstavlja divergenco napetostnega tenzorja (za ponovljene indekse velja sumacijski dogovor).

Izpeljavo osnovnih enačb začnemo z izračunom časovnega odvoda (označeno s piko nad simbolom) proste energije, od koder lahko izpeljemo identiteto

$$\dot{\psi} - \sigma_{ij}\dot{u}_{i,j} = 0 \quad (3)$$

Levo stran te enačbe odvajamo po x_k , integriramo po času ter ustrezno preuredimo [7]. Končen rezultat lahko zapišemo v obliki ravnovesne enačbe konfiguracijskih sil

$$C_{ij,j} + g_i = 0 \quad (4)$$

kjer je

$$C_{ij} = \psi \delta_{ij} - \sigma_{kj} u_{k,i} \quad (5)$$

Eshelbyev tenzor, simbol g_i pa označuje vektorsko polje konfiguracijskih sil

$$g_i = -f_j u_{j,i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \Big|_{\text{eksp}} \quad (6)$$

Pri tem zadnji člen predstavlja parcialni odvod izključno po tistih x_i , ki so v definicijo ψ vpleteni v eksplicitni obliki. Opozorimo na dejstvo, da je v primeru odsotnosti volumskih sil prvi člen na desni strani gornje enačbe enak nič. Če nadalje privzamemo, da je obravnavano telo homogeno, pa postane nič tudi drugi člen (prosta energija ψ homogenega telesa ni eksplicitno odvisna od x_i). V tem primeru torej povsod v notranjosti telesa velja $g_i = 0$.

3 Izračun vozliščnih konfiguracijskih sil

Obravnavamo nehomogeno hiperelastično telo B s površjem ∂B , ki je brez volumskih obremenitev, $f_i = 0$. Za ravnovesno enačbo konfiguracijskih sil zahtevamo izpolnjevanje v šibki obliki

$$\int_B (C_{ij,j} + g_i) \eta_i dv = 0 \quad (7)$$

kjer je η_i vektorska testna funkcija. Z integracijo po delih in upoštevanjem divergenčnega teorema od tod dobimo šibko formulacijo problema

$$-\int_B C_{ij} \eta_{i,j} dv + \int_{\partial B} C_{ij} n_j \eta_i da + \int_B g_i \eta_i dv = 0 \quad (8)$$

kjer je n_i zunanja normala na površju ∂B . Ker obravnavamo samo stacionarne mejne ploskve, velja robni pogoj $\eta_i = 0$ na ∂B ; integral po površju telesa je tako enak nič.

Kot je to običajno pri metodi KE, vpeljemo diskretizacijo testne funkcije ter njenega gradienta

$$\eta_i = \sum_I N^I \eta_i^I, \quad \eta_{i,j} = \sum_I N_j^I \eta_i^I \quad (9)$$

kjer je N^I interpolacijska funkcija I -tega vozlišča (sestavljena iz ustreznih interpolacijskih funkcij končnih elementov iz množice E^I , ki se stikajo v vozlišču I). Z vstavljanjem teh nastavkov v šibko formulacijo problema ter upoštevanjem poljubne vrednosti testne funkcije, dobimo izraz za vozliščno konfiguracijsko silo G_i^I I -tega vozlišča

$$G_i^I = \int_{E^I} N^I g_i dv = \int_{E^I} C_{ij} N_j^I dv \quad (10)$$

Ta enačba omogoča relativno enostaven izračun vozliščnih konfiguracijskih sil po tem, ko je primarna analiza odziva opravljena in je torej napetostno/deformacijsko stanje poznano.

Če predpostavimo uporabo izoparametričnih KE (enaka interpolacija za polja in geometrijo), od tod sledi pomembna fizikalna interpretacija vektorja G_i^I , in sicer

$$G_i^I = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_i^I} \quad (11)$$

kjer je Ψ deformacijska energija telesa, x_i^I pa je koordinata I -tega vozlišča. Vozliščna konfiguracijska sila je torej enaka negativnemu odvodu celotne deformacijske energije po koordinati vozlišča.

4 Dvig kvalitete mreže KE

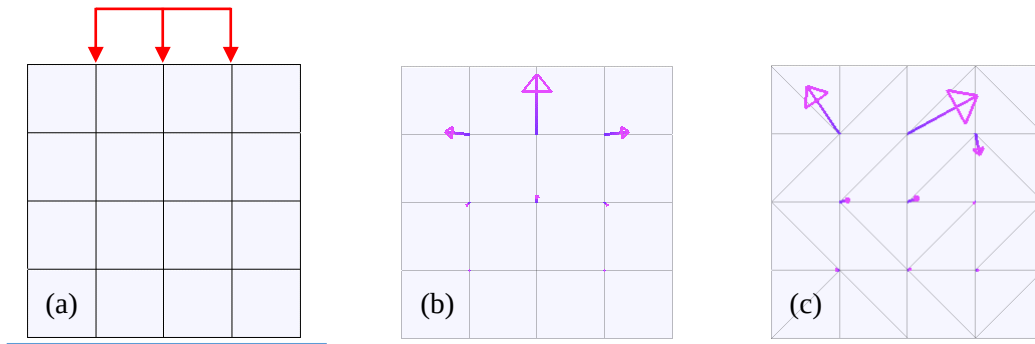
Obravnavamo homogeno linearno elastično telo, ki je brez volumskih obremenitev. Glede na teorijo prikazano v predhodnih poglavjih, to pomeni $g_i = 0$ v vseh notranjih točkah telesa. Na diskretiziranem modelu, bi se to dejstvo moralo preslikati v

$$G_i^I = 0 \quad (12)$$

za vsa *notranja* vozlišča modela (ki ne ležijo na površju telesa). V realnosti diskretni MKE modeli temu pogoju običajno ne zadoščajo, kar pomeni, da imamo na modelu prisotne neke (numerične) nehomogenosti, ki so očitno posledica diskretizacije in uporabe interpolacijskih funkcij izbranih KE. Brez ustrezne teoretične podlage naredimo naslednje špekulativne razmisleke:

1. Diskretiziran model je običajno pretog, kar je posledica dejstva, da interpolirana polja ne morejo ustrezno opisati dejanskih polj (zaklepanje elementov).
2. Pretog model pomeni, da je izračunana deformacijska energija Ψ nižja, kot je v resnici.
3. Če velja predhodni sklep, bi situacijo morda lahko popravili tako, da notranja vozlišča premaknemo v smeri največjega naraščanja Ψ , kar pomeni v smeri $-G_i^I$.

Oglejmo si primer na sliki 1. Podprtje in obremenitve so prikazane na sliki 1a, negativne konfiguracijske sile notranjih vozlišč pa so prikazane na slikah 1b in 1c. Slednje lepo odražajo simetrijo podprtja in obremenitev v primeru strukturirane simetrične mreže štiristraničnih elementov (Q4), slika 1b. Če elemente Q4 nadomestimo s poljubno orientiranimi trikotnimi elementi (T3), pa se razpored konfiguracijskih sil precej spremeni, slika 1c.

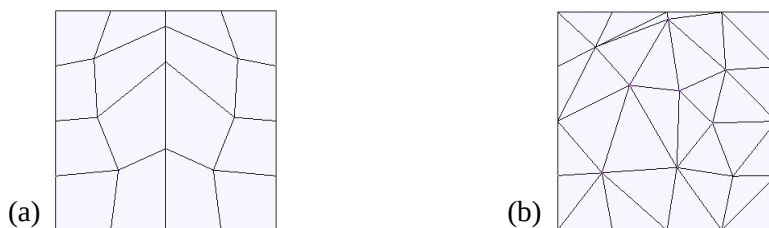


Slika 1: Obremenjen blok: podprtje in obremenitve (a) ter negativne konfiguracijske sile notranjih vozlišč (b,c)

Optimizacijo obeh mrež izvedemo z iterativnim postopkom, kjer v vsaki iteraciji opravimo MKE analizo (in izračun konfiguracijskih sil) ter notranja vozlišča premaknemo v smeri $-G_i^I$. Rezultata optimizacije simetrične mreže Q4 in nesimetrične mreže T3 prikazuje slika 2.

Pri mreži Q4, slika 2a, je deformacijska energija med optimizacijo narasla od $\Psi_{\text{ini}} = 1.53$ do $\Psi_{\text{opt}} = 1.55$, medtem, ko se je vsota norm vseh konfiguracijskih sil zmanjšala iz $\Omega_{\text{ini}} = 0.0223$ na $\Omega_{\text{opt}} = 0.0016$. Pri mreži T3, slika 2b, je bil rezultat podoben, in sicer, $\Psi_{\text{ini}} = 1.46$, $\Psi_{\text{opt}} = 1.49$, $\Omega_{\text{ini}} = 0.0456$, $\Omega_{\text{opt}} = 0.0090$.

Formalno je bila torej optimizacija uspešna – deformacijska energija je narasla, vozliščne konfiguracijske sile pa so se približale ničli. Kljub temu je predvsem iz slike 2b že na prvi pogled očitno, da sta omenjena kazalca uspešnosti le dva indikatorja, ki očitno ne povesta cele zgodbe.



Slika 2: Optimirani mreži Q4 (a) in T3 (b)

Zaradi navedenega smo opravili še kar nekaj testov na namenskih enostavnih zgledih, ki tukaj zaradi omejitve prostora niso predstavljeni. Opažanja in ugotovitve, ki smo jih zbrali na teh testnih zgledih, lahko v grobem strnemo v naslednjih točkah:

- Dejstvo je, da vozliščni pomiki v negativni smeri konfiguracijskih sil dvignejo deformacijsko energijo. Skoraj zagotovo na to vpliva zmanjšanje zaklepanja KE, vendar ni povsem jasno ali je to posledica tudi kakšnih drugih numeričnih artefaktov, in če je, v kolikšni meri.
- V določenih situacijah lahko konfiguracijske sile potiskajo vozlišča tudi tako daleč, da kakšen KE postane geometrijsko degeneriran. To pomeni da konfiguracijska sila nikakor ne more biti edini faktor pri določanju smeri pomika vozlišča; vključitev dodatka geometrijskih mer za kvaliteto KE s tem postane nujna.
- Numerično obnašanje elementov Q4 je bilo večinoma videti precej manj problematično kot obnašanje elementov T3. To ni najboljša novica za realne inženirske primere, kjer smo praktično povsem omejeni na tetraedre – prostorske sorodnike ravninskega elementa T3.
- V primeru konstantnega napetostno/deformacijskega stanja so vozliščne konfiguracijske sile notranjih vozlišč enake nič. Ker to velja tudi v primeru geometrijsko zelo degradiranih KE, izboljševanje mreže očino ne more temeljiti zgolj na konfiguracijskih silah.

Vsaka izmed navedenih ugotovitev prinaša s sabo takšne ali drugačne težave, ki jih bo nujno potrebno nasloviti, če bi želeli konfiguracijske sile dejansko vključiti v postopke izboljševanja mrež KE.

5 Optimizacija oblike

Če so za izboljševanje kvalitete mreže pomembne konfiguracijske sile notranjih vozlišč, pa bi pri optimizaciji oblike lahko bile koristne konfiguracijske sile mejnih vozlišč, ki ležijo na površju telesa.

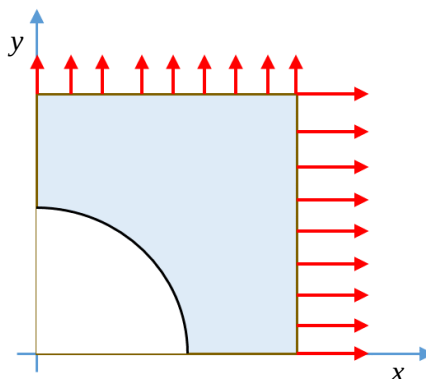
Obravnavamo homogeno linearno elastično telo, ki je brez volumskih obremenitev. Čeprav je $g_i = 0$ v vseh notranjih točkah telesa, pa to ne velja za mejne točke, saj površje

telesa predstavlja prehod iz materialne domene v praznino (nehomogenost). Posledično v splošnem velja

$$G_i^I \neq 0 \quad (12)$$

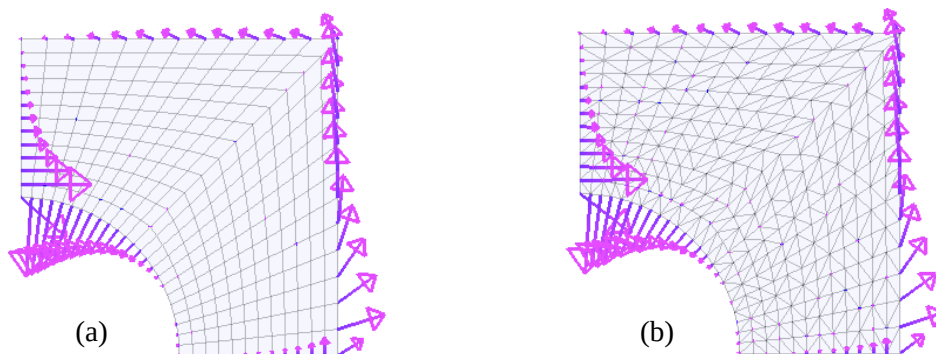
za vsa *mejna* vozlišča modela (ki ležijo na površju telesa). Spomnimo se, da smo v teoretičnem delu izpeljali enačbo $G_i^I = -\partial\Psi/\partial x_i^I$. To pomeni, da bi pomiki zunanjih vozlišč v smeri $+G_i^I$ deformacijsko energijo telesa zmanjšali, kar je tudi cilj optimizacije oblike.

Oglejmo si model $\frac{1}{4}$ plošče s krožno odprtino, slika 3. Plošča je po zunanjih robovih enakomerno natezno obremenjena; obremenitev v smeri x je dvakratnik obremenitve v smeri y . Analitična rešitev za optimalno konturo odprtine je elipsa.



Slika 3: Ena četrtina enakomerno natezno obremenjene plošče s krožno odprtino; obremenitev v smeri x je dvakratnik obremenitve v smeri y .

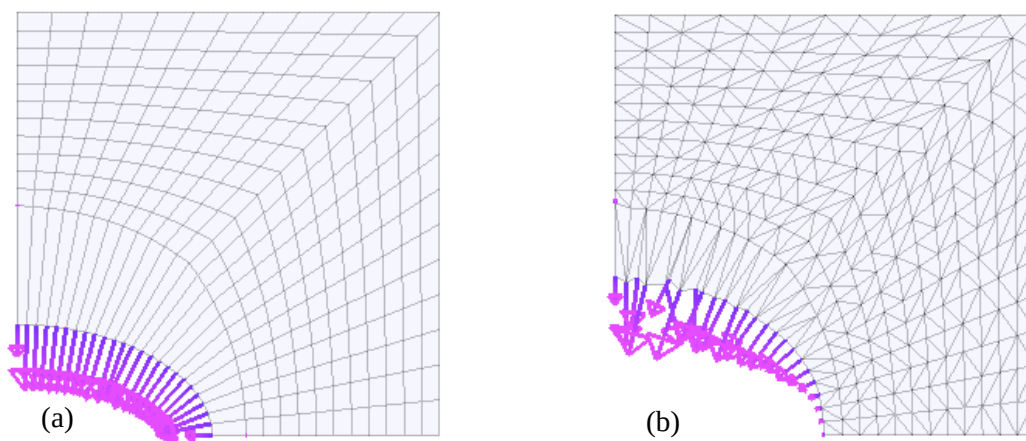
Slika 4 prikazuje razpored konfiguracijskih sil za mreži z elementi Q4 in T3. V obeh primerih je razporeditev $+G_i^I$ vzdolž krožne konture dokaj ometavna; izjema sta obe krajni vozlišči zaradi četrtinskega modela ter posledično odsotnih sosednjih elementov. To dejstvo zahteva ustrezno korekcijo konfiguracijske sile preden se ta uporabi za popravek lege vozlišča.



Slika 4: Konfiguracijske sile za mreži iz elementov Q4 (a) in T3 (b)

Načelno bi pomiki vozlišč na krožni konturi, ki bi jih izvedli v smeri $+G_i^I$ morali rezultirati v popravljeni obliki konture, ki je bližje elipsi. Na mreži Q4 je ta postopek lepo tekkel, rezultat

pa je lepo oblikovana kontura z ustreznimi enakomernimi vektorji konfiguracijskih sil, slika 5a. Precej slabše je pa tekel postopek na mreži T3. Relativno hitro je namreč prišlo do opaznega slabšanja gladkosti konture, kar je pripeljalo do degeneriranega T3 elementa in posledično končanja MKE analize z napako. Slika 5b prikazuje stanje tik pred prekinitvijo optimizacijskega postopka zaradi napake.



Slika 5: Optimirana kontura odprtine s konfiguracijskimi silami za mreži Q4 (a) in T3 (b); optimizacija mreže T3 je bila prekinjena zaradi degeneriranega elementa.

Na osnovi dobljenih rezultatov lahko vsekakor naredimo nekaj splošnih ugotovitev, ki so povzete v naslednjih točkah:

- Konfiguracijske sile nedvomno ponujajo neke nove možnosti pri optimizaciji oblike. To je očitno na rezultatu strukturirane enakomerne mreže elementov Q4, kjer je končen rezultat dokaj lepa eliptična kontura.
- Na mreži T3 rezultati niso tako pozitivni, vendar to še ne pomeni, da je pristop neuporaben. Optimizacija oblike se namreč praviloma vrši znotraj kompleksnega procesa z integriranim geometrijskim glajenjem površja in popravljanjem kvalitete elementov v zaledju optimirane površine.
- Tudi v tem primeru se je lepo videlo, da je obnašanje elementov T3 numerično bolj problematično od elementov Q4. Od tod sledi, da bomo v realnosti pri uporabi tetraedrov skoraj zagotovo naleteli na podobne težave kot jih izkazujejo ravninski elementi T3.

Za konec velja omeniti še tehnično težavo, ki jo ilustrirata krajni vozlišči na krožni konturi. Zaradi upoštevanja dvojne simetrije smo modelirali le $\frac{1}{4}$ plošče. Krajnima vozliščema na konturi tako manjkajo sosednji elementi, kar se pozna na izračunani konfiguracijski sili. Zaenkrat ni povsem jasno, kako bi lahko ta problem rešili na nek sistematičen način na poljubnih prostorskih primerih. Gre sicer za bolj tehnično vprašanje, ki pa mora biti pred vpeljavo metode v prakso seveda prav tako rešeno.

6 Zaključek

Glede na numerične rezultate lahko zaključimo, da konfiguracijske sile vsekakor nudijo neke nove pristope tako k izboljševanju mreže KE kot tudi k optimizaciji oblike. Uspešna implementacija teh pristopov v praksi bo odvisna predvsem od dveh faktorjev. Prvi se nanaša na uspešnost reševanje numeričnih težav, ki so na kratko predstavljene v tem prispevku. Drug faktor pa se tiče sprejemljivosti količine potrebnega računanja. Ne pozabimo, da izračun konfiguracijskih sil v vsaki iteraciji spreminjanja mreže zahteva celotno MKE analizo. Posledično bo verjetno uporaba konfiguracijskih sil v realnosti upravičena le kot dodatek v iteracijskih postopkih, ki že v osnovi zahtevajo MKE analizo v vsaki iteraciji. V tem primeru izračun konfiguracijskih sil predstavlja le majhen dodatni računski napor v fazi postprocesiranja MKE rezultatov.

Literatura

- [1] J. D. Eshelby, *The force on an elastic singularity*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 244, 87–112, 1951.
- [2] F. D. Fischer, N. K. Simha, J. Predan, R. Schoengrundner, O. Kolednik, *On configurational forces at boundaries in fracture mechanics*, Int. J. Fract., 174, 61–74, 2012.
- [3] M. E. Gurtin, *Configurational forces as basic concepts of continuum physics*, Springer New York, 2000.
- [4] O. Kolednik, M. Kegl, N. Gubeljak, J. Predan, *Estimate of the driving force for creep crack growth*, Engng. Fract. Mech., 319, 111031, 2025
- [5] G. A. Maugin, *Configurational forces – thermomechanics, physics, mathematics and numerics*, CRC Press New York, 2011.
- [6] R. Mueller, G. A. Maugin, *On material forces and finite element discretizations*, Computational Mechanics, 29, 52–60, 2002.
- [7] R. Mueller, S. Kolling, D. Gross, *On configurational forces in the context of the finite element method*, Int. J. Numer. Meth. Engng., 53, 1557–1574, 2002.
- [8] G. Stankiewicz, C. Dev, P. Steinmann, *Configurational-force-driven adaptive refinement and coarsening in topology optimization*, Structural and Multidisciplinary Optimization, 68:152, 2025.



Modalna analiza disperzije Lambovih valov v trislojnih plastovitih kompozitnih ploščah s kontrastnimi materialnimi lastnostmi slojev

Anatolij Nikonov¹, Barbara Zupančič², Marko Nagode¹ in Jernej Klemenc¹

Modal analysis of Lamb wave dispersion in three layered composite plates with contrasting properties of layers

Povzetek. Vzpostavili smo inženirsko usmerjeno numerično metodologijo za analizo disperzije elastičnih valov v plastovitih kompozitnih ploščah z izrazito kontrastnimi materialnimi lastnostmi slojev, ki temelji na modalni analizi z metodo končnih elementov z uporabo komercialne programske opreme. Numerične rezultate smo primerjali z iterativnimi rešitvami Rayleigh–Lambovih disperzijskih enačb za osnovno antisimetrično nihanje in prvi antisimetrični harmonik. Predlagani pristop natančno reproducira kompleksne disperzijske značilnosti, vključno frekvenčnimi pragovi višjih načinov nihanja. Omogoča jasen vpogled v frekvenčna območja, kjer pride do vzbujanja posameznih načinov valovanja. Točnost, enostavnost in računska učinkovitost predstavljene metodologije postavljajo praktičen okvir za disperzijsko analizo večslojnih struktur s poljubnim številom slojev.

Abstract. A novel engineering-oriented numerical methodology for the analysis of elastic wave dispersion in high-contrast composite sandwich plates has been established using modal finite element (FEM) analysis available in commercial software. The numerical results are validated through comparison with iterative solutions of the Rayleigh–Lamb dispersion equations for the fundamental and the first harmonic antisymmetric modes. The proposed approach accurately reproduces complex dispersion characteristics, including higher-order mode cut-off frequencies, and provides clear insight into the frequency ranges in which individual wave modes can be excited. Owing to its accuracy, simplicity, and computational efficiency, the methodology offers a practical framework for dispersion analysis of multilayered structures with an arbitrary number of layers.

1 Uvod

Zaradi izrazitega porasta uporabe visokotehnoloških kompozitnih struktur v različnih panogah, kot so gradbeništvo, sodobna letalska industrija in avtomobilska industrija, so bile večslojne kompozitne plošče (laminati) v zadnjih desetletjih intenzivno raziskovane s

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Slovenija

² Kemijski inštitut, Teoretični odsek, Slovenija

teoretičnega, numeričnega in eksperimentalnega vidika [1,2]. Dinamični odziv tankega ploščatega medija je opisan z ravninskimi oziroma Lambovimi valovi, ki jih usmerjata prosta zgornja in spodnja površina. Pri plastoviti plošči, sestavljeni iz makroskopsko homogenih slojev, je treba upoštevati, da širjenje Lambovih valov vključuje odboje in lom valov na mejah med sloji ter sipanje na prosti zgornji in spodnji površini [1]. Načine širjenja valov v neskončni plošči določajo vpadni kot, frekvenca in geometrija konstrukcije. Zaradi disperzije so hitrosti Lambovih valov odvisne ne le od materialnih lastnosti, temveč tudi od frekvenca valovanja [1]. Disperzijske relacije oziroma disperzijske krivulje podajajo zelo pomembne informacije o odvisnosti hitrosti od frekvenca oziroma valovnega števila za elastične valove, ki se širijo v obravnavanih strukturah. Poleg tega omogočajo oceno časa širjenja signalov oziroma razdalj, kar je ključnega pomena za strategije zaznavanja poškodb, ki temeljijo na širjenju vodenih elastičnih valov [1,3].

Obstoječe dinamične teorije za plastovite elastične kompozitne strukture matematično večinoma niso dovolj dosledne pri upoštevanju širokega razpona kontrastnih fizikalnih in geometrijskih lastnosti slojev, ki jih srečujemo v sodobnih visokotehnoloških konstrukcijah [4]. Pomemben prispevek k razlagi teh pojavov so podali Kaplunov in sodelavci [5]. Pokazali so, da lahko določen kontrast v materialnih in geometrijskih lastnostih pri trikomponentni elastični palici povzroči, da se najnižje lastne frekvence približajo nič. Novejše raziskave obravnavajo najnižje nihajne načine pri večkomponentnih palicah in valjih [6], elastičnih nosilcih iz komponent različnih lastnosti [7] ter pri prostih, vsiljenih in naključnih nihanjih nosilca iz dveh materialov z izrazito različnima moduloma elastičnosti in gostotama materialov [8]. Ugotovitve teh raziskav imajo pomembne posledice tudi za disperzijsko analizo upogibanja večslojnih plošč, sestavljenih iz slojev s kontrastnimi lastnostmi. Frekvence, obravnavane za enodimenzionalne probleme, namreč ustrezajo frekvenčnim pragovom (angl. *cut-off frequencies*) plošče [5]. Majhna vrednost prvega frekvenčnega praga tako lahko povzroči šibko sklopitev med osnovnim upogibnim načinom nihanja in prvim višjim harmonikom [5], kar zahteva uporabo posebnih teorij strižnih deformacij, doslednih pristopov in večjo pozornost pri iskanju numeričnih rešitev.

Zaradi bližine osnovnega antisimetričnega (upogibnega) načina in strižnega načina prvega reda pri tankih ploščah, pri katerih se frekvenčni prag pomika proti nižjemu frekvenčnemu območju, je lahko fizikalna interpretacija rezultatov klasičnih tridimenzionalnih analiz z metodo končnih elementov (MKE) bistveno otežena [9]. Poleg razvoja naprednejših teorij to močno spodbuja tudi razvoj ustrezne računske metodologije za natančno vrednotenje in interpretacijo numeričnih rezultatov, predvsem nihajnih spektrov ter pripadajočih pomikov in napetosti. Takšne informacije so izjemno pomembne pri optimiranju konstrukcij in neporušnih preiskavah večslojnih struktur [9,10,11]. V literaturi ni zaslediti veliko prispevkov, ki bi poročali o generiranju disperzijskih krivulj načinov širjenja Lambovih valov z MKE analizo, čeprav so takšne krivulje ključne za vpogled v frekvenčna območja, kjer pride do vzbujanja posameznih načinov.

V prispevku predstavljamo inženirsko usmerjeno metodologijo za proučevanje disperzije Lambovih valov v tanki trislojni kompozitni plošči (sendvič plošči) s kontrastnimi lastnostmi posameznih slojev. Pokažemo, da je kompleksne disperzijske pojave v sendvič ploščah mogoče razmeroma enostavno in točno opredeliti z obdelavo rezultatov modalne analize s pomočjo MKE, izvedene z uporabo komercialne programske opreme. Glavni namen razvite metodologije je zagotoviti praktičen in širše dostopen pristop k preučevanju disperzijskih

pojavov ter ponuditi jasnejši vpogled v možnosti uporabe komercialne programske opreme za poglobljene dinamične analize konstrukcij.

2 Teoretično ozadje širjenja valovanja v trislojnih plastovitih kompozitnih ploščah

Lambovi valovi so posebna vrsta površinsko vodenih valov, ki se širijo v trdnem mediju, omejenem z dvema vzporednima ploskvama, prostima strižnih napetosti (npr. v ploščatih strukturah). Gre za superpozicijo vzdolžnih in strižnih valov, ki se sočasno razširjajo v dveh neodvisnih načinih: simetričnem (vzdolžnem) (S) in antisimetričnem (prečnem) (A) [1,3].

Osnovna simetrični (S_0) in antisimetrični (A_0) način imata začetno frekvenco enako nič, kar pomeni, da valovanje lahko začne potovati skozi material v kateremkoli frekvenčnem območju od 0 Hz navzgor. Pri valovnih dolžinah, večjih od debeline plošče (tj. v nizkofrekvenčnem območju), se osnovni simetrični in antisimetrični način imenujeta ekstenzijski oziroma upogibni način. V večini praktičnih primerov ta dva načina prenašata več energije in imata manjše dušenje kot višji načini. A_0 upogibni način pri nizkih frekvencah prevladuje nad ekstenzijskim, saj ga je lažje vzbuditi in pogosto prenaša večino energije. Po drugi strani ima ekstenzijski način običajno večjo hitrost in manjšo amplitudo.

Matematični izrazi, ki opisujejo oba načina v tanki plošči, povezujejo hitrost širjenja valov s frekvenco, kar kaže na disperzivno naravo valov, tj. odvisnost hitrosti od frekvence valovanja (glej npr. [1]). Ena od olajševalnih okoliščin pri proučevanju Lambovih valov je, da so napetosti, pomiki ter porazdelitev energije vseh Lambovih načinov v plošči simetrični glede na srednjo ravnino plošče. Poleg tega predpostavka ravninskega deformacijskega stanja močno poenostavi analizo in se pomiki v ravnini $x - y$ lahko izrazijo kot $u_x = u_x(x, y, t)$ in $u_y = u_y(x, y, t)$. Ustrezne disperzijske karakteristične enačbe, t.i. Rayleigh–Lambove frekvenčne enačbe, dajejo dve vrsti rešitev. Prva, pri kateri je pomik u_x soda funkcija v spremenljivki y , tj. $u_x(x, y, t) = u_x(x, -y, t)$, pripada simetričnemu načinu, medtem ko druga, kjer je u_x liha funkcija v spremenljivki y , tj. $u_x(x, -y, t) = -u_x(x, y, t)$, pripada antisimetričnemu načinu.

Ob upoštevanju enačb gibanja in Hookovega zakona pridemo do valovnih enačb za pomike, ki jih izrazimo kot

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial y}, u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_z}{\partial x}, \quad (1)$$

pri čemer je φ skalarni potencial, ψ_z pa z komponenta vektorskega potenciala iz Helmholtzove dekompozicije. Oba potenciala zadoščata dvodimenzionalni valovni enačbi in rešitve iščemo z nastavkoma s separacijo spremenljivk

$$\varphi = \Phi(y)e^{i(kx - \omega t)}, \psi_z = i\Psi(y)e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2)$$

kjer je ω kotna hitrost, k pa valovno število. Z vključitvijo teh dveh nastavkov v dvodimenzionalno valovno enačbo za Φ in Ψ dobimo

$$\Phi(y) = A \sin(\alpha y) + B \cos(\alpha y), \Psi(y) = C \sin(\beta y) + D \cos(\beta y), \quad (3)$$

kjer sta α in β longitudinalno oziroma strižno valovno število:

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - k^2, \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2, \quad (4)$$

s hitrostjo longitudinalnih valov $c_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$ in hitrostjo strižnih valov $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$, gostoto materiala ρ , elastičnim modulom E in Poissonovim količnikom ν . Za u_x v ravnini $x - y$ je gibanje simetrično (antisimetrično) glede na $y = 0$, če u_x vsebuje kosinus (sinus) in za u_y ravno obratno. Na podlagi tega širjenje valovanja obravnavamo v simetričnem načinu preko enačb:

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= B \cos(\alpha y), \Psi(y) = C \sin(\beta y) \\ u_x &= i[kB \cos(\alpha y) + \beta C \cos(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)} \\ u_y &= -[B \alpha \sin(\alpha y) + kC \sin(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)} \\ \sigma_{xx} &= \mu[(2\alpha^2 - \kappa^2(k^2 + \alpha^2))B \cos(\alpha y) - 2k\beta C \cos(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)} \\ \sigma_{yy} &= \mu[(2k^2 - \kappa^2(k^2 + \alpha^2))B \cos(\alpha y) + 2k\beta C \cos(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)} \\ \tau_{xy} &= -i\mu[2\alpha k B \sin(\alpha y) + (\beta^2 - k^2)C \sin(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)} \end{aligned} \quad (5)$$

in antisimetričnem načinu preko enačb

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= A \sin(\alpha y), \Psi(y) = D \cos(\beta y) \\ u_x &= i[kA \sin(\alpha y) - \beta D \sin(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)} \\ u_y &= A \alpha \cos(\alpha y) + kD \cos(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)} \\ \sigma_{xx} &= \mu[(2\alpha^2 - \kappa^2(k^2 + \alpha^2))A \sin(\alpha y) + 2k\beta D \sin(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)} \\ \sigma_{yy} &= \mu[(2k^2 - \kappa^2(k^2 + \alpha^2))A \sin(\alpha y) - 2k\beta D \sin(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)} \\ \tau_{xy} &= i\mu[2\alpha k A \cos(\alpha y) - (\beta^2 - k^2)D \cos(\beta y)] e^{i(kx-\omega t)}, \end{aligned} \quad (6)$$

kjer je $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ Laméjev parameter in $\kappa^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}$.

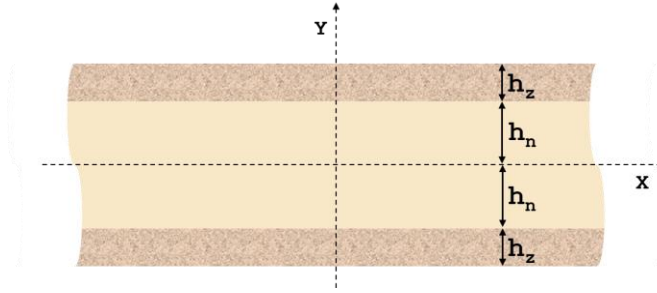
Ob upoštevanju robnih pogojev $\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$ na zgornjem in spodnjem robu plošče dobimo dva sistema homogenih enačb za konstante A, B, C in D , pri čemer reševanje teh sistemov enačb vodi do Rayleigh-Lambove disperzijske enačbe za simetrično valovanje

$$\frac{\tan(\beta h)}{\tan(\alpha h)} = -\frac{4k^2\alpha\beta}{(k^2 - \beta^2)^2} \quad (7)$$

in antisimetrično valovanje

$$\frac{\tan(\beta h)}{\tan(\alpha h)} = -\frac{(k^2 - \beta^2)^2}{4k^2\alpha\beta}. \quad (8)$$

V tem prispevku obravnavamo širjenje Lambovih valov v neskončni trislojni (sendvič) kompozitni plošči z debelino zgornjega in spodnjega sloja h_z in debelino osrednjega sloja (jedrne plasti) $2h_n$ v ravnini $x - y$ (slika 1) pri pogojih ravninskega deformacijskega stanja.



Slika 1: Neskončna trislojna (sendvič) kompozitna plošča v prerezu.

Izpeljave disperzijskih enačb temeljijo na enačbah za posamezen sloj. Za jedrno plast in zunanja sloja izhajamo iz gibalnih enačb, ki so z upoštevanjem sumacijskega dogovora podane v obliki

$$\sigma_{ij,j}^n = \rho_n \ddot{u}_i^n \text{ in } \sigma_{ij,j}^z = \rho_z \ddot{u}_i^z \text{ za } i, j = x, y, \quad (9)$$

kjer se n nanaša na notranji (jedrni) sloj, z pa na zunanja sloja. σ_{ij}^n in σ_{ij}^z so komponente napetostnega tenzorja, u_i^n in u_i^z pomiki, ρ_n in ρ_z pa gostoti materialov notranjega oziroma zunanjih slojev.

Z vključitvijo konstitutivnih napetostno-deformacijskih zvez

$$\sigma_{ij}^n = \lambda_n u_{k,k}^n \delta_{ij} + \mu_n (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n) \text{ in } \sigma_{ij}^z = \lambda_z u_{k,k}^z \delta_{ij} + \mu_z (u_{i,j}^z + u_{j,i}^z) \text{ za } i, j = x, y, \quad (10)$$

kjer so λ_n , λ_z , μ_n in μ_z Laméjevi parametri, robnih pogojev na zgornji in spodnji ploskvi zunanjih slojev pri $y = \pm(h_n + h_z)$

$$\sigma_{xy}^z|_{y=\pm(h_n+h_z)} = \sigma_{yy}^z|_{y=\pm(h_n+h_z)} = 0 \quad (11)$$

ter pogojev zveznosti na mejah med sloji pri $y = \pm h_n$

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^n|_{y=\pm h_n} &= \sigma_{xy}^z|_{y=\pm h_n}, \quad \sigma_{yy}^n|_{y=\pm h_n} = \sigma_{yy}^z|_{y=\pm h_n}, \\ u_x^n|_{y=\pm h_n} &= u_x^z|_{y=\pm h_n} \text{ in } u_y^n|_{y=\pm h_n} = u_y^z|_{y=\pm h_n} \end{aligned} \quad (12)$$

izpeljemo disperzijske enačbe za analizo simetričnih in antisimetričnih lastnih načinov valovanja, ki so v matrični obliki podrobneje predstavljeni v [12].

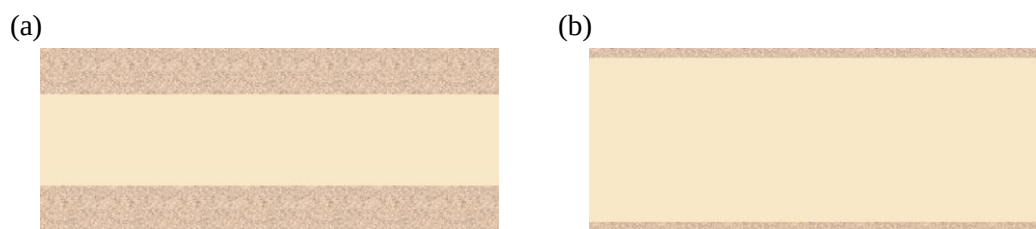
Hitrost longitudinalnih valov v jedrnem sloju c_{1n} , hitrost longitudinalnih valov v zunanjih slojih c_{1z} , hitrost strižnih valov v jedrnem sloju c_{2n} ter hitrost strižnih valov v zunanjih slojih c_{2z} lahko izrazimo preko Laméjevih parametrov

$$\begin{aligned} c_{1n}^2 &= \frac{\lambda_n + 2\mu_n}{\rho_n} = \frac{E_n(1-\nu_n)}{\rho_n(1+\nu_n)(1-2\nu_n)}, \quad c_{1z}^2 = \frac{\lambda_z + 2\mu_z}{\rho_z} = \frac{E_z(1-\nu_z)}{\rho_z(1+\nu_z)(1-2\nu_z)} \\ c_{2n}^2 &= \frac{\mu_n}{\rho_n} = \frac{E_n}{2\rho_n(1+\nu_n)}, \quad c_{2z}^2 = \frac{\mu_z}{\rho_z} = \frac{E_z}{2\rho_z(1+\nu_z)}, \end{aligned} \quad (13)$$

kjer sta E_n in ν_n modul elastičnosti in Poissonov količnik jedrnega sloja, E_z in ν_z pa modul elastičnosti in Poissonov količnik zunanjih slojev.

3 Modalna analiza trislojnih plastovitih kompozitnih plošč z MKE

Modalna analiza z MKE je bila izvedena za dve različni tanki sendvič strukturi (glej sliko 2) s programsko opremo Ansys Mechanical APDL Environment, Release 17.2. Ob upoštevanju ravninskega deformacijskega stanja smo prečni prerez neskončne trislojne tanke plošče upodobili v ravnini $x - y$ z dvodimenzionalnim modelom v obliki pravokotnika z razmerjem 500:1 med dolžino L in debelino plošče $H = 2(h_n + h_z)$. Umestili smo ga v koordinatni sistem, kjer x -koordinatna os poteka vzdolž dolžine skozi horizontalno simetralo, y -koordinatna os pa vzdolž debeline skozi levi rob dvodimenzionalnega modela.



Slika 2: Trislojni plošči s kontrastnimi lastnostmi: (a) zunanji plasti imata večjo gostoto, nižji strižni modul in primerljivo debelino v primerjavi z notranjo plastjo, (b) zunanji plasti imata bistveno večjo gostoto, nižji strižni modul in manjšo debelino v primerjavi z notranjo plastjo.

Ploščo smo diskretizirali s končnimi elementi tipa Quad 4 node 182, ki se uporabljajo kot ravninski elementi in so primerni za dvodimenzionalno modeliranje trdnih struktur. Diskretizacijo modela na sliki 2a smo izvedli z 32000 končnimi elementi (4000 segmentov vzdolž dolžine, 4 segmenti vzdolž debeline osrednje plasti, 2 segmenta vzdolž posameznega zunanjega sloja), diskretizacijo modela na sliki 2b pa s 40000 končnimi elementi (4000 segmentov vzdolž dolžine, 8 segmentov vzdolž debeline osrednje plasti, 1 segment vzdolž posameznega zunanjega sloja). Pogojem zveznosti na mejah med plastmi (enačba 12) smo v modelu zadostili z uporabo funkcije *glue Boolean operation*, za izvedbo modalne analize pa v modelu postavili robne pogoje $u_x(x = 0, y, t) = u_x(x = L, y, t) = 0$, ki ne izključujejo robnih pogojev na zgornji in spodnji ploskvi zunanjih slojev (enačba 11).

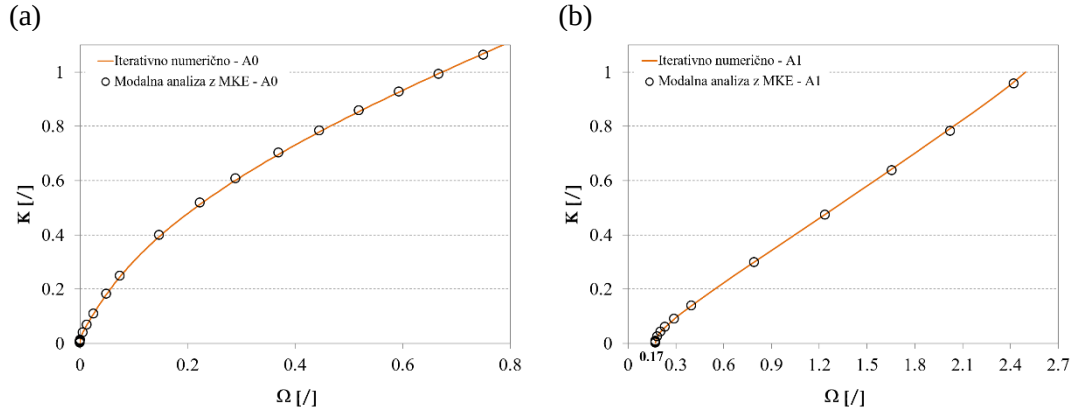
Gostote, elastični moduli, Poissonovi količniki in debeline slojev za modalno analizo dveh različnih sendvič plošč so bili izbrani na način, da ustrezajo vrednostim brezdimenzijskih parametrov, ki so jih v svoji raziskavi vpeljali Kaplunov in sodelavci [13]. To so brezdimenzijski parametri $h = h_z/h_n$, $\varepsilon = \mu_n/\mu_z$, $r = \rho_n/\rho_z$, $\kappa_z = c_{2z}/c_{1z}$, and $\kappa_n = c_{2n}/c_{1n}$, izbrane vrednosti za analizo pa so predstavljene v tabeli 1.

Tabela 1: Vrednosti brezdimenzijskih parametrov.

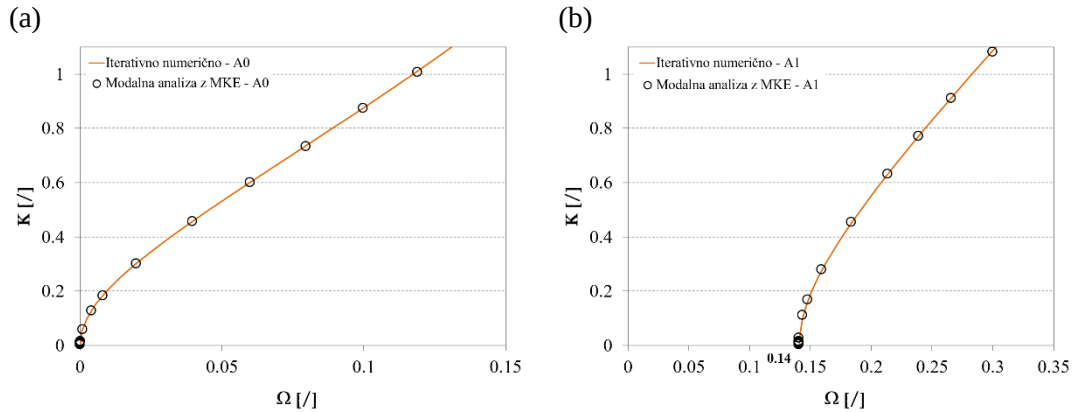
Tip trislojne kompozitne plošče	Vrednosti brezdimenzijskih parametrov				
	h	ε	r	κ_z	κ_n
Tip 1	1.0	0.014	0.03	~0.53	~0.46
Tip 2	0.01	0.014	0.0002	~0.53	~0.46

4 Rezultati

V nadaljevanju so predstavljene disperzijske krivulje v obliki grafov brezrazsežnostnega parametra $K = kh_n$ v odvisnosti od brezrazsežnostnega parametra $\Omega = \omega h_n / c_{2n}$. Primerjane so z rezultati, ki smo jih pridobili z iterativnim numeričnim reševanjem Rayleigh-Lambovih disperzijskih enačb. Primerjava je prikazana na slikah 3 in 4 za osnovni antisimetrični način A_0 in prvi višji antisimetrični način A_1 pri troslojnih ploščah tipov 1 in 2 (slika 2). Podatki, pridobljeni z iterativnim numeričnim reševanjem, so upodobljeni s polno črto, rezultati naše modalne analize z MKE pa s simbolom praznih krogov.



Slika 3: Disperzijske krivulje za ploščo tipa 1: (a) osnovni antisimetrični način A_0 ; (b) prvi višji antisimetrični način A_1 , analizirana z iterativnim numeričnim reševanjem Rayleigh-Lambove disperzijske zveze (polna črta) in modalno analizo z MKE (prazni simboli).



Slika 4: Disperzijske krivulje za ploščo tipa 2: (a) osnovni antisimetrični način A_0 ; (b) prvi višji antisimetrični način A_1 , analizirana z iterativnim numeričnim reševanjem Rayleigh-Lambove disperzijske zveze (polna črta) in modalno analizo z MKE (prazni simboli).

Iz slik 3 in 4 je razvidno, da se naši rezultati (prazni simboli) za načina A_0 in A_1 , dobljeni z modalno analizo z MKE, zelo dobro ujemajo z rešitvami disperzijskih enačb (polna črta na

slikah 3 in 4), pridobljenimi z iterativnim numeričnim postopkom. Frekvenčni pragovi načina A_1 so bili določeni v bližini:

- 349 Hz (kar ustreza $\Omega \approx 0,17$) za kompozitne plošče tipa 1,
- 1758 Hz (kar ustreza $\Omega \approx 0,14$) za kompozitne plošče tipa 2.

5 Zaključki

Prikazali smo uspešno uporabo inženirskega numeričnega pristopa za proučevanje disperzije Lambovih valov v tanki trislojni kompozitni plošči s kontrastnimi materialnimi lastnostmi z uporabo široko razširjene programske opreme za MKE. Predstavljena metodologija se lahko potencialno uporablja za podrobnejšo analizo dinamičnega odziva konstrukcij v številnih inženirskih aplikacijah, ki vključujejo takšne elemente. Vrednost in prednost predlagane metodologije v primerjavi z drugimi pristopi je njena praktičnost in dostopnost za široko uporabo v inženirski praksi. Določanje lastnih nihajnih oblik in frekvenčnih pragov s komercialnimi programskimi orodji za MKE namreč lahko služi kot dragocen pristop tako pri optimizacijskem načrtovanju konstrukcij kot tudi načrtovanju neporušnih preiskav večslojnih struktur.

Zahvala

Avtorji iz Univerze v Ljubljani se zahvaljujejo Javni agenciji za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije (ARIS) za sofinanciranje raziskovalnega programa št. P2-0182 »Razvojna vrednotenja«.

Literatura

- [1] H. Altenbach, V.A. Eremeyev, K. Naumenko, *On the use of the first order shear deformation plate theory for the analysis of three-layer plates with thin soft core layer*, ZAMM Zeitschrift Fur Angew. Math. Und Mech. 95, 1004–1011, 2015.
- [2] I. Elishakoff, T. Fang, C. Jiang, *Free, forced, and random vibrations of a beam composed of highly contrasting materials*, Appl. Math. Model. 89, 1696–1720, 2021.
- [3] J.D. Kaplunov, E.V. Nolde, B.F. Shorr, *A perturbation approach for evaluating natural frequencies of moderately thick elliptic plates*, J. Sound Vib. 281, 905–919, 2005.
- [4] J. Kaplunov, D. Prikazchikov, O. Sergushova, *Multi-parametric analysis of the lowest natural frequencies of strongly inhomogeneous elastic rods*, J. Sound Vib. 366, 264–276, 2016.
- [5] Kaplunov, D.A. Prikazchikov, L.A. Prikazchikova, *Dispersion of elastic waves in a strongly inhomogeneous three-layered plate*, Int. J. Solids Struct. 113–114, 169–179, 2017.
- [6] J. Kaplunov, D.A. Prikazchikov, L.A. Prikazchikova, O. Sergushova, *The lowest vibration spectra of multi-component structures with contrast material properties*, J. Sound Vib. 445, 132–147, 2019.
- [7] S. Kuznetsov, *Lamb waves in sandwich structures: Anomalous dispersion and transverse (quasi) resonances*, J. Vib. Control. 31(19–20), 2024.
- [8] P.C.Y. Lee, N. Chang, *Harmonic waves in elastic sandwich plates*, J. Elast. 9, 51–69, 1979.

- [9] E. Moreno, R. Giacchetta, R. Gonzalez, D. Sanchez, O. Sanchez-Sobrado, A. Torre-Poza, G. Cosarinsky, W. Coelho, *Ultrasonic non-contact air-coupled technique for the assessment of composite sandwich plates using antisymmetric Lamb waves*, NDT, 1(1), 58–73, 2023.
- [10] O. Şahin, B. Erbaş, J. Kaplunov, T. Savšek, *The lowest vibration modes of an elastic beam composed of alternating stiff and soft components*, Arch. Appl. Mech. 90, 339–352, 2020.
- [11] A.S. Sayyad, Y.M. Ghugal, *On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: a review of recent literature with some numerical results*, Compos. Struct. 129, 177–201, 2015.
- [12] Z. Su, L. Ye, Y. Lu, *Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: a review*, J. Sound Vib. 295, 753–780, 2006.
- [13] Z. Su, L. Ye, *Fundamentals and analysis of Lamb waves*, in: Identif. Damage Using Lamb Waves, Springer, London, 2009, pp. 15–58.



Vpliv žarjenja na mehanske in geometrijske lastnosti 3D tiskanega PLA

Matjaž Mir¹, Branko Nečemer¹, Jasmin Kaljun¹, Andrej Cupar¹, Blaž Hanželič¹, Vasja Plesec¹ in Gregor Harih¹

Influence of Annealing on the Mechanical and Geometrical Properties of 3D-Printed PLA

Povzetek. V prispevku je predstavljeno eksperimentalno vrednotenje vpliva žarjenja na mehanske in geometrijske lastnosti 3D tiskanih nateznih preizkušancev iz polilaktične kisline (ang. *polylactic acid* - PLA), izdelanih s tehnologijo iztiskavanja materiala s ciljnim nanašanjem slojev (ang. *Fused Filament Fabrication* - FFF). Glavni cilj raziskave je bil preveriti, ali režimi žarjenja, izbrani na osnovi preteklih raziskav, izboljšajo mehanske lastnosti in kako vplivajo na spremembo geometrije. Izvedene so bile štiri serije enoosnih nateznih preizkusov v statičnem načinu obremenjevanja z različnimi temperaturami in časi žarjenja, načini ohlajanja ter usmeritvami ekstrudiranih rasterjev. Toplotni odziv je bil ovrednoten z dinamično mehansko analizo. Geometrijske spremembe zaradi žarjenja so bile spremljane na nateznih preizkušancih. Rezultati niso pokazali zanesljivega povečanja natezne trdnosti, medtem ko je bilo pri delu preizkušancev opaženo povečanje modula elastičnosti do približno 11 %. Žarjenje je povzročilo do 9 % geometrijske spremembe. Čeprav literatura pri primerljivih parametrih poroča o izrazitem izboljšanju mehanskih lastnosti PLA, tega v raziskavi ni bilo mogoče potrditi. Rezultati kažejo, da je učinek žarjenja močno odvisen od materiala in pogojev izdelave.

Abstract. This paper presents an experimental evaluation of the effect of annealing on the mechanical and geometrical properties of 3D-printed tensile specimens made of polylactic acid (PLA) using fused filament fabrication (FFF). The main objective of the study was to determine whether annealing regimes selected based on previous research improve the mechanical properties and how they affect geometrical changes. Four series of uniaxial tensile tests were performed under static loading conditions, using different annealing temperatures and times, cooling methods, and orientations of the extruded rasters. The thermal response was evaluated by dynamic mechanical analysis. Geometrical changes caused by annealing were monitored on the tensile specimens. The results did not show a reliable increase in tensile strength, while an increase in the elastic modulus of up to approximately 11% was observed in some specimens. Annealing caused geometrical changes of up to 9%. Although the literature reports significant improvements in the mechanical properties of PLA under comparable parameters, this could not be confirmed in the present study. The results indicate that the effect of annealing strongly depends on the material and manufacturing conditions.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

1 Uvod

Dodajalna izdelava omogoča izdelavo geometrijsko zahtevnih in uporabniku prilagojenih izdelkov. Med najbolj razširjenimi postopki je ciljno nalaganje slojev (ang. *Fused Filament Fabrication* - FFF), pri katerem se termoplastični filament nalaga po plasteh [2].

Polilaktična kislina (ang. *Polylactic acid* - PLA) je eden najpogostejše uporabljenih materialov za FFF tiskanje [8]. Material omogoča stabilen in ponovljiv tisk, vendar ima pri funkcionalnih izdelkih več omejitev: krhkost, relativno nizko temperaturno obstojnost in izrazito odvisnost mehanskih lastnosti od orientacije tiska, smeri zapolnitve in kakovosti medstojne povezave [8]. Značilnost postopka FFF je plastovita zgradba izdelka, zaradi katere natisnjeni izdelki izkazujejo izrazito anizotropne mehanske lastnosti, ki jih je potrebno upoštevati pri zasnovi obremenjenih komponent.

Številni avtorji so raziskovali in dosegli izboljšanje mehanskih lastnosti PLA s postopkom toplotne obdelave po 3D tisku. Na podlagi opravljene analize literature iz obravnavanega področja, avtorji poročajo o povečanju natezne in upogibne trdnosti, modula elastičnosti in toplotne stabilnosti [4, 5, 7, 10]. Čeprav lahko toplotna obdelava izboljša posamezne mehanske lastnosti, hkrati povzroča geometrijske spremembe izdelka. Geometrijske spremembe se pojavijo zaradi sproščanja notranjih napetosti, ki nastanejo kot posledica hitrega ohlajanja pri izbrani tehnologiji. Pri aplikativni uporabi žarjenih izdelkov iz PLA je zato ključno, da so spremembe, ki se nanašajo na samo geometrijo čim manjše oziroma znotraj dopustnih toleranc. Vpliv žarjenja na mehanske lastnosti 3D tiskanega PLA je bil obravnavan v več znanstvenih raziskavah. Jayanth in drugi poročajo o 80 % povečanju natezne trdnosti zaradi posledic žarjenja [4]. Kartal in Kaptan poročata o 48 % povečanju natezne trdnosti in 78 % povečanju modula elastičnosti [5]. V članku avtorjev Zisopol in drugih so zapisali da so z žarjenjem dosegli do 30 % povečanje natezne trdnosti, ob tem pa so opazili padec modula elastičnosti [10]. Avtorji Shbanah in drugi so pri svoji analizi vpliva toplotne obdelave opazili 35 % povečanje natezne trdnosti [6]. Avtorja Yalkin in Ozkan sta zabeležila samo 7 % povečanje natezne trdnosti [8]. Med posameznimi avtorji opazimo tudi zelo različne parametre toplotne obdelave. Temperatura žarjenja se pri zgoraj omenjenih člankih giblje med 65 °C do 100 °C. Temperaturna izpostavljenost preizkušancev pa se giblje med 30 minut in 5 ur. Opazimo lahko zelo različne pristope avtorjev in tudi različne končne rezultate. Potrebno je tudi izpostaviti, da so vsi avtorji uporabljali PLA drugačnih proizvajalcev.

Iz pregleda znanstvene literature, je razvidno, da so rezultati toplotne obdelave precej različni in medsebojno težko primerljivi. Razlike opazimo pri uporabljenih parametrih žarjenja, različnih načinih ohlajanja preizkušancev in uporabljenih različnih PLA filamentih. Potrebno je izpostaviti, da vsak proizvajalec pri izdelavi PLA filamenta uporablja različne aditive in primesi. To lahko vpliva, da se filament različnih proizvajalcev na žarjenje odzovejo drugače. Zaradi velikega števila medsebojno povezanih vplivnih parametrov ostaja odprto vprašanje: Pod katerimi pogoji in ali sploh, žarjenje povzroči ponovljivo izboljšanje mehanskih lastnosti in kakšne geometrijske spremembe pri tem nastanejo? Na tej osnovi so bili v raziskavi izbrani režimi žarjenja, ki izhajajo iz objavljenih eksperimentalnih študij, ter dopolnjeni z rezultati dinamične mehanske analize izbranih PLA filamentov. S tem je bilo mogoče sistematično preveriti vpliv temperature, časa izpostavljenosti, načina hlajenja, orientacije tiskanja in vrste filamenta na mehanski odziv ter geometrijske spremembe preizkušancev.

Namen predstavljene raziskave je bil zato eksperimentalno preveriti ali režimi žarjenja izbrani na osnovi drugih avtorjev, ugodno vplivajo na mehanske in geometrijske lastnosti FFF-

tiskanih preizkušancev iz dveh komercialnih PLA filamentov ter oceniti posledice žarjenja na geometrijsko stabilnost.

2 Metode in materiali

2.1 Raziskovalni pristop

Eksperimentalno delo je bilo izvedeno v štirih serijah. Ker rezultati začetnih serij niso pokazali pričakovanega izboljšanja mehanskih lastnosti, so bili v nadaljevanju preverjeni dodatni režimi žarjenja. Parametri posameznih serij so bili določeni na podlagi objavljenih raziskav in sprotnih ugotovitev predhodno izvedenih preizkusov. Iterativen pristop je omogočil preverjanje možnih razlogov za odstopanje rezultatov od ugotovitev drugih avtorjev. Preverjeni so bili vplivi vrste izbranega PLA, temperature in časa žarjenja, načina hlajenja ter usmerjenosti ekstrudiranih rastrov. V tabeli 1 so predstavljeni parametri žarjenja, pri katerih so avtorji v predhodnih raziskavah dosegli najugodnejše izboljšanje mehanskih lastnosti. Ti podatki so bili izhodišče za izbiro parametrov žarjenja. Poleg mehanskega odziva je bila v vseh serijah opazovana sprememba dimenzij nateznih preizkušancev.

Tabela 1: Parametri žarjenja najugodnejših rezultatov drugih avtorjev

Avtor	Parametri žarjenja	Povečanje natezne trdnosti	Način ohlajanja po žarjenju
Jayanth idr. [4]	100 °C, 4 h	~80%	Počasno ohlajenje v pečici
Kartal in Kaptan [5]	85 °C, 90 min	48%	Počasno ohlajenje v pečici
Zisopol idr. [10]	75 °C, 3 h	~30%	Zelo počasno ohlajenje v pečici
Shbanah idr. [6]	65 °C, 5 h	35%	Na prostem pri sobni temperaturi (20 °C)

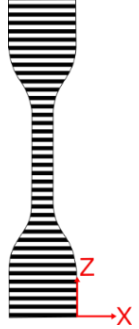
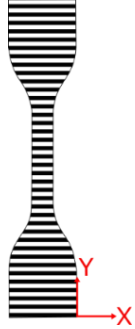
Skupno je bilo izvedenih 55 nateznih preizkusov. Poudarek v raziskavi je na primerjavi trendov in na ugotovitvi, ali je bil pri katerem od preverjenih režimov, doseženo izboljšanje mehanskih lastnosti in ali so geometrijske spremembe minimalne oz. znotraj dovoljenih toleranc.

2.2 Materiali in izdelava preizkušancev

V raziskavi sta bila uporabljena dva komercialna PLA filamenta. Uporabili smo Bambu PLA Basic (Bambu Lab, Shenzhen, Kitajska) in eSUN PLA-ST (Shenzhen Esun Industrial Co., Shenzhen, Kitajska). Filament Bambu PLA Basic je obravnavan kot osnovni in pogosto uporabljen PLA filament, medtem ko je eSUN PLA-ST modificiran PLA filament, v katerem so prisotni dodatki za povečanje raztezka pri pretrgu in boljšo odpornost proti udarnim obremenitvam. Preizkušanci so bili izdelani na 3D tiskalniku Bambu Lab X1 Carbon (Bambu Lab, Shenzhen, Kitajska). Pred tiskanjem je bil filament sušen 8 h pri 50 °C, skladno s priporočili proizvajalca, z namenom zmanjšanja vpliva absorbirane vlage na stabilnost procesa tiskanja in kakovost natisnjenih preizkušancev [1, 3]. Za mehansko karakterizacijo so bili uporabljeni natezni preizkušanci oblike ASTM D638 tip IV.

Pri pripravi vzorcev so bile upoštevane različne orientacije tiska in različne smeri zapolnitve. V tabeli 2 so prikazane uporabljene orientacije tiska in različne smeri zapolnitve na tiskanih vzorcih, kjer je Z os pravokotna na delovno mizo 3D tiskalnika, Y in X os pa sta vzporedni z mizo 3D tiskalnika. Črno bele črte pri primeru a) ponazarjajo smer nalaganja slojev, pri primerih b) in c) pa smer poteka ekstrudiranih rastrov v ravnini tiskanja.

Tabela 2: Orientacija tiska nateznih preizkušancev

	a)	b)	c)
	Pokončna orientacija	Ležeča orientacija, prečna smer rastrov	Ležeča orientacija, vzdolžna smer rastrov
Orientacija tiska			

V tabeli 3 so predstavljeni parametri tiskanja, za vsak material posebej.

Tabela 3: Parametri tiskanja, kot jih priporoča proizvajalec filamenta

Material	Bambu PLA Basic	eSUN PLA-ST
Temperatura tiskanja [°C]	220	230
Temperatura mize [°C]	55	55
Premjer šobe [mm]	0,4	0,4
Višina sloja [mm]	0,15	0,15
Višina prvega sloja [mm]	0,2	0,2
Število sten	1	1
Zapolnitev [%]	100	100
Hitrost tiskanja [mm/s]	90	90

2.3 Toplotna obdelava

Žarjenje je bilo izvedeno v električni peči na vroč zrak Kambič SP-55 EASY (Kambič d.o.o., Semič, Slovenija). Kot izhaja iz pregleda literature in v tabeli 1 predstavljenih najugodnejših parametrov toplotne obdelave, so bile za eksperimentalni del izbrane temperature in časovne izpostavljenosti, pri katerih so predhodne študije poročale o spremembah mehanskih lastnosti 3D tiskanega PLA. Izbor parametrov je zato temeljil na eksperimentalno najbolj obetavnih režimih žarjenja.

Razporeditev uporabljenih materialov, parametrov žarjenja in orientacij tiska po posameznih eksperimentalnih serijah je povzeta v tabeli 4.

Tabela 4: Pregled ključnih parametrov posameznih serij

Serijska	Material	Parametri žarjenja	Orientacija tiska	Način hlajenja po žarjenju
1.	eSUN PLA-ST	70 °C in 80 °C; 60 min, 90 min in 120 min	a) in b)	Hlajenje na zraku
2.	Bambu PLA Basic	90 °C; 120 min	a) in b)	Hlajenje na zraku
3.	Bambu PLA Basic in eSUN PLA-ST	70 °C, 90 °C in 110 °C; 300 min	b)	Hlajenje na zraku in v pečici
4.	Bambu PLA Basic in eSUN PLA-ST	90 °C in 100 °C; 120 min	c)	Hlajenje na zraku in v pečici

2.4 Mehansko in termo mehansko vrednotenje

Enoosni natezni preizkusi v kvazistatičnem načinu obremenjevanja so bili izvedeni na elektrodinamičnem preizkuševalnem stroju Zwick/Roell LTM 3 (ZwickRoell GmbH & Co, Ulm, Nemčija). Preizkusi so bili izvedeni v kontroli pomika s konstantno deformacijsko hitrostjo $0,01 \text{ s}^{-1}$. Iz pridobljenih podatkov o izmerjeni sili in pomiku, sta bili izračunani inženirska napetost in inženirska deformacija.

Za podporno razlago toplotnega odziva obeh materialov je bila izvedena dinamična mehanska analiza (DMA). Med segrevanjem s hitrostjo 1 K/min sta bila spremljana elastični strižni modul G' in faktor izgub $\tan(\delta)$. Iz poteka krivulj sta bili ocenjeni območje steklastega prehoda in temperatura, pri kateri se začne izrazitejša strukturna prerazporeditev materiala.

2.5 Geometrijska analiza nateznih preizkušancev

Pri nateznih preizkušancih so bile poleg mehanskih lastnosti spremljane tudi geometrijske spremembe zaradi toplotne obdelave. Vsi preizkušanci so bili pred in po žarjenju izmerjeni z digitalnim kljunastim merilom z ločljivostjo $0,01 \text{ mm}$. Izmerjene so bile ključne dimenzije preizkušancev. Izmerili smo debelino, širino merilnega dela, skupno širino preizkušanca in dolžino preizkušanca. Na podlagi primerjave meritev pred in po žarjenju je bila določena relativna sprememba posamezne dimenzije. Geometrijska analiza je omogočila oceno dimenzijske stabilnosti preizkušancev.

3 Rezultati

3.1 Vpliv toplotne obdelave na mehanske lastnosti

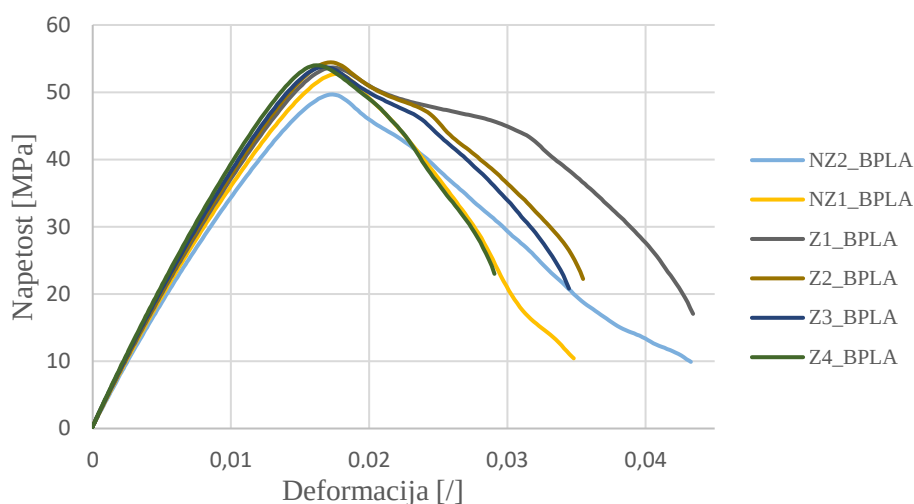
3.1.1 Natezna trdnost

V prvi seriji eksperimentalnih testiranj povečanja natezne trdnosti glede na nežarjene primerjalne preizkušance ni bilo opaženo pri nobeni orientaciji tiska. Razlike med odzivi žarjenih vzorcev so bile majhne, zato začetno preverjanje ni potrdilo prenosa izboljšanj, pričakovanih na podlagi literature.

V drugi seriji eksperimentalnih testiranj, žarjenje ni povzročilo izrazitega povečanja natezne trdnosti pri nobeni od testiranih orientacij tiskanja.

V tretji seriji eksperimentalnih testiranj, je pri eSUN PLA-ST bila najvišja izmerjena natezna trdnost žarjenega vzorca le minimalno večja od ne žarjenega vzorca, pri Bambu PLA Basic pa so bile razlike med žarjenimi in ne žarjenim vzorcem majhne. Vpliv načina hlajenja preizkušancev ni povzročil spremembe natezne trdnosti.

Rezultate nateznih preizkusov četrte serije prikazuje slika 1. Prikazani so rezultati preizkušancev iz filamenta Bambu PLA Basic. Pri žarjenih preizkušancih je bila izmerjena približno 5 % višja povprečna natezna trdnost kot pri ne žarjenih preizkušancih. Pri eSUN PLA-ST izboljšanje tudi v tej seriji ni bilo opaženo.



Slika 1: Napetostno-deformacijski odziv ne žarjenih (NZ) in žarjenih (Z) preizkušancev iz Bambu PLA Basic pri vzdolžni smeri ekstrudiranih rastrov.

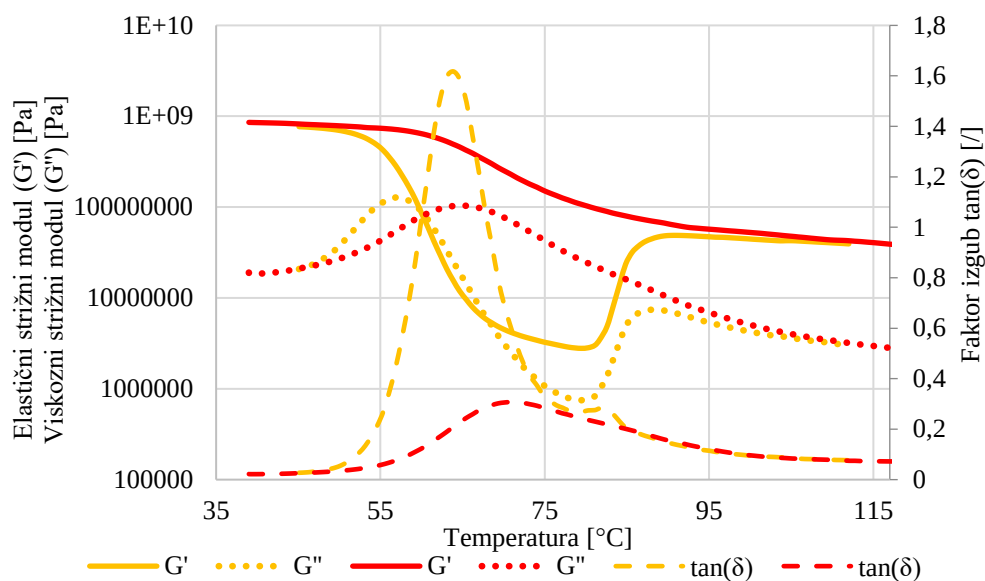
3.1.2 Modul elastičnosti

Pri filamentu Bambu PLA Basic je žarjenje povzročilo opaznejše spremembe modula elastičnosti kot pri natezni trdnosti. V drugi seriji je bilo povečanje modula majhno, pod 5 %, v nadaljnjih serijah pa je bilo pri žarjenih vzorcih ugotovljeno povečanje približno med 6 % in 11 %, odvisno od temperature in pogojev izdelave. Pri eSUN PLA-ST primerljivo povečanje modula elastičnosti ni bilo opaženo, kar kaže, da je odziv na žarjenje odvisen tudi od vrste komercialnega PLA filamenta.

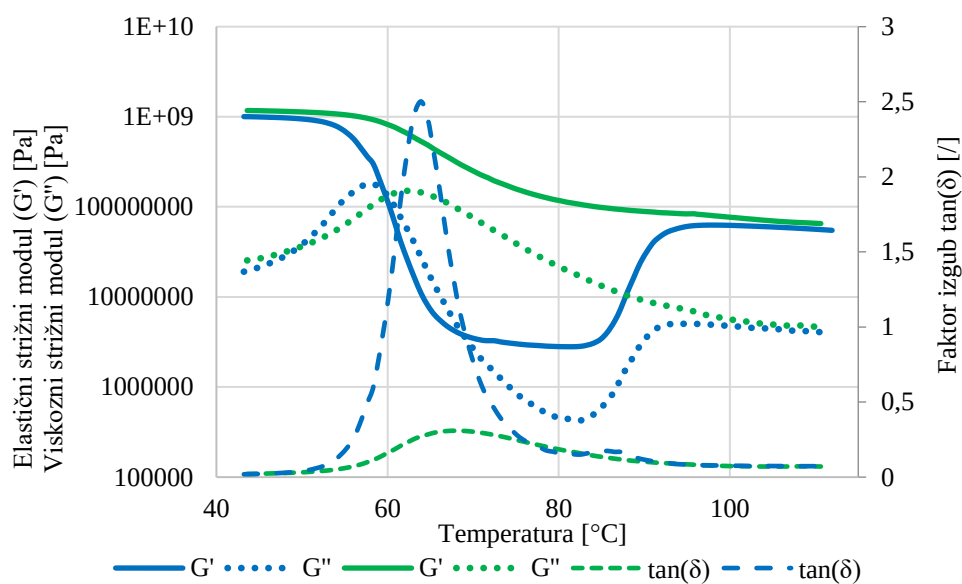
Poleg tega je bila pri žarjenih vzorcih, zlasti pri longitudinalno tiskanih preizkušancih, opazna manjša deformacija ob pretrgu.

3.2 Dinamična mehanska analiza – DMA

DMA analiza je pokazala, da sta imela uporabljena materiala podobno temperaturo steklastega prehoda, vendar nekoliko različen nadaljnji termomehanski odziv. Pri Bambu PLA Basic (slika 2) je bil vrh $\tan(\delta)$, uporabljen za oceno steklastega prehoda, ugotovljen pri približno 64 °C. Elastični strižni modul G' je po začetnem padcu pri višjih temperaturah začel naraščati nad približno 85 °C. Pri eSUN PLA-ST (slika 3) je bila temperatura steklastega prehoda ocenjena na približno 65 °C, naraščanje G' pa se je pojavilo nad približno 80 °C. Ponovna rast G' kaže temperaturo, pri kateri se začne povečevati togost materiala, kar je mogoče povezati z začetkom hladne kristalizacije oziroma preurejanjem polimernih verig v bolj urejeno strukturo.



Slika 2: Rezultati DMA analize: a) Bambu PLA Basic



Slika 3: Rezultati DMA analize: b) eSUN PLA-ST

3.3 Geometrijska analiza nateznih preizkušancev

Pri vseh serijah so se po žarjenju pojavile spremembe dimenzij preizkušancev. Splošen trend je bil krčenje v ravnini poteka ekstrudiranih rastrov in povečanje dimenzije v smeri nalaganja slojev. Pri nižjih temperaturah so bile spremembe večinoma omejene na nekaj odstotkov, pri daljšem žarjenju in višjih temperaturah pa so postale bistveno izrazitejše.

Največje geometrijske spremembe so bile opažene pri filamentu Bambu PLA Basic. V tretji seriji se je pri najizrazitejših režimih debelina vzorcev povečala do približno 9 %. Pri eSUN PLA-ST so bile geometrijske spremembe manjše in so pri primerljivih pogojih dosegle približno 4 %. Četrta serija je dodatno pokazala, da se je pri longitudinalno potekajoči zapolnitvi dolžina vzorcev iz Bambu PLA Basic zmanjšala za skoraj 8 %, medtem ko so se druge dimenzije povečale. Višja temperatura žarjenja je praviloma povzročila večja odstopanja oblike.

V tabeli 5 so predstavljene ključne ugotovitve posameznih serij izvedenih mehanskih testiranj in geometrijskih sprememb preizkušancev.

Tabela 5: Ključne ugotovitve

Serija	Ključni rezultat natezne trdnosti	Ključni rezultat modula elastičnosti	Geometrijski odziv
1.	Brez povečanja	Spremembe ni	Spremembe do ± 2 %.
2.	Brez povečanja	Povečanje manj kot 5 %	Spremembe do ± 5 %
3.	Brez povečanja	Bambu PLA: do 10 %; eSUN: brez spremembe	Bambu PLA: do 9 %; eSUN: do ± 3 %
4.	Bambu PLA: trend +5 %; eSUN: brez povečanja	Bambu PLA: 7–11 %; eSUN: brez spremembe	Krčenje v smeri ekstrudirnih rastrov do 8 %

4 Diskusija

Rezultati nateznih preizkusov kažejo, da preverjeni režimi žarjenja pri izbranih PLA filamentih niso povzročili zanesljivega povečanja natezne trdnosti. V raziskavah, ki so bile uporabljene za izbor parametrov, so bila pri določenih temperaturah in časih žarjenja dosežena znatna povečanja natezne trdnosti [4, 5, 10]. V predstavljeni raziskavi so bili preverjeni primerljivi temperaturni in časovni režimi, vendar pri dveh komercialnih filamentih ni bilo ugotovljenega primerljivega izboljšanja. To ne pomeni, da žarjenje PLA ne more biti učinkovito, ampak nakazuje, da režimov žarjenja ni mogoče neposredno prenesti na drug material.

V prvi, drugi in tretji seriji povečanja natezne trdnosti glede na nežarjene primerjalne preizkušance ni bilo opaženo. V četrti seriji je bilo pri filamentu Bambu PLA Basic opaženo rahlo povečanje povprečne natezne trdnosti, vendar je bila razlika majhna in je zaradi omejenega števila preizkušancev ni mogoče zanesljivo potrditi. Za potrditev vpliva žarjenja na natezno trdnost bi bilo treba izvesti več ponovitev in statistično ovrednotiti raztros rezultatov.

Razlike med rezultatoma obeh filamentov kažejo, da oznaka PLA sama po sebi ne določa celotnega materialnega odziva na žarjenje. Komercialni filament se lahko razlikujejo po barvilih, modifikatorjih udarne žilavosti, nukleacijskih dodatkih in drugih dodatkih, ki vplivajo na potek toplotne obdelave [8]. To se je pokazalo tudi v tej raziskavi, saj sta se Bambu PLA Basic in eSUN PLA-ST kljub enaki osnovni polimerni sestavi različno odzvala na žarjenje. Pri filamentu Bambu PLA Basic je bil vpliv žarjenja komaj opazen, pri filamentu eSUN PLA-ST pa primerljivega izboljšanja mehanskega odziva ni bilo mogoče potrditi.

Vpliv žarjenja je bil opazen pri modulu elastičnosti. Pri filamentu Bambu PLA Basic se je modul elastičnosti po žarjenju povečal, medtem ko pri filamentu eSUN PLA-ST povečanja ni

bilo. To kaže, da je toplotna obdelava pri filamentu Bambu PLA Basic povečala togost materiala, ne da bi hkrati zagotovila primerljivo povečanje natezne trdnosti. Takšen odziv je mogoče povezati s spremembo mikrostrukture PLA med žarjenjem. Pri povišani temperaturi se poveča gibljivost polimernih verig, zato lahko pride do delnega preurejanja amorfne strukture v bolj urejeno kristalno oziroma semikristalinično strukturo. Ker so kristalna območja bolj toga kot amorfna faza, se poveča začetna togost materiala, kar se odraža v višjem modulu elastičnosti [5].

Pri žarjenih vzorcih je bila opažena tudi manjša deformacija ob pretrgu, zlasti pri longitudinalno tiskanih preizkušancih. Takšen odziv je skladen s preходом v bolj togo in manj duktilno materialno obnašanje po toplotni obdelavi.

Rezultati DMA so podprli izbiro režimov pri 90 °C in več, saj so ti režimi ležali v temperaturnem območju, kjer je bilo mogoče pričakovati izrazitejšo spremembo materialnega odziva. Ker v okviru raziskave ni bila izvedena analiza stopnje kristaliničnosti, natančnega vzroka za opažene spremembe mehanskih lastnosti ni mogoče zanesljivo določiti.

Na mehanski odziv pomembno vpliva tudi notranja zgradba FFF-tiskanega izdelka. Pri nateznih preizkušancih je ta določena predvsem z orientacijo slojev in usmeritvijo ekstrudiranih rastrov glede na smer obremenitve. V četrti seriji, pri kateri so bili rastrti usmerjeni vzdolž osi preizkušanca, je bilo pri filamentu Bambu PLA Basic opaženo manjše povišanje natezne trdnosti. Ker primerljivo izboljšanje v drugih serijah ni bilo opaženo, rezultatov raziskav ni mogoče primerjati samo po temperaturi in času žarjenja. Primerljivi morajo biti tudi parametri tiskanja, orientacija tiska in smer zapolnitve.

Geometrijske spremembe so po žarjenju pokazale bolj dosleden trend kot spremembe mehanskih lastnosti. Pri večini preizkušancev je bilo opaženo krčenje v smeri ekstrudiranih rastrov in povečanje dimenzije v smeri nalaganja slojev. To je mogoče povezati s sproščanjem zaostalih napetosti, ki nastanejo med nanašanjem in hitrim hlajenjem staljenega materiala. Višja temperatura in daljši čas izpostavljenosti sta takšen odziv povečala. Za dimenzijsko občutljive izdelke to predstavlja glavno omejitev žarjenja, saj lahko sprememba oblike nastopi tudi takrat, ko so mehanske koristi majhne ali nezanesljive.

Raziskava je temeljila na zaporednem preverjanju režimov iz literature in omejenem številu ponovitev, zato majhnih razlik v mehanskih lastnostih ni mogoče obravnavati kot zanesljivo potrjene učinke žarjenja. Nadaljnje raziskave bi morale vključevati sistematičen eksperimentalni načrt, večje število ponovitev in podrobnejše vrednotenje vpliva osnovnega materiala na odziv pri žarjenju. Za zanesljivejšo razlago opaženih sprememb bi bilo smiselno vključiti tudi določanje stopnje kristaliničnosti. Ker v obravnavani raziskavi preverjeni režimi pri izbranih PLA filamentih niso povzročili zanesljivega povečanja natezne trdnosti, bi bilo nadaljnje delo smiselno razširiti tudi na druge polimerne materiale in metode naknadne obdelave. Zhang idr. [9] so pokazali, da je učinek žarjenja izrazito odvisen od materiala in uporabljene metode, saj so bili poleg PLA obravnavani tudi PEEK, PA, PETG, ABS in PLA/CF ter postopki, kot so žarjenje v peči, mikrovalovno žarjenje, indukcijsko žarjenje in žarjenje v pari topila. V nadaljnjih raziskavah bi bilo zato smiselno preveriti tudi materiale, kot so PA, PETG, ABS, PEEK ali filament z vlaknasto ojačitvijo, ter ovrednotiti razmerje med izboljšanjem mehanskih lastnosti in geometrijsko stabilnostjo.

5 Zaključek

V prispevku je bil eksperimentalno ovrednoten vpliv žarjenja na mehanske in geometrijske lastnosti FFF-tiskanih nateznih preizkušancev iz dveh komercialnih PLA filamentov. Režimi žarjenja, izbrani na podlagi literature in podprti z rezultati DMA, pri obravnavanih materialih niso povzročili zanesljivega povečanja natezne trdnosti. Pri filamentu Bambu PLA Basic je bil v eni seriji opažen le trend približno 5 % višje natezne trdnosti, ki ga zaradi omejenega števila ponovitev ni mogoče zanesljivo potrditi, medtem ko pri filamentu eSUN PLA-ST povečanja ni bilo. Izrazitejši vpliv žarjenja je bil ugotovljen pri modulu elastičnosti, ki se je pri filamentu Bambu PLA Basic povečal do približno 11 %, ter pri geometrijski stabilnosti, kjer so spremembe pri nateznih preizkušancih dosegle približno 9 %. Rezultati kažejo, da režimov žarjenja iz literature ni mogoče neposredno prenesti na drug filament in drugačne pogoje izdelave. Postopek lahko poveča togost materiala, vendar lahko hkrati povzroči geometrijske spremembe, ki omejijo funkcionalno uporabnost dimenzijsko občutljivih izdelkov. Nadaljnje raziskave bi morale vključevati sistematičen eksperimentalni načrt, večje število ponovitev, določanje stopnje kristaliničnosti ter preverjanje drugih polimernih materialov in postopkov omejevanja deformacij med toplotno obdelavo.

Literatura

- [1] Bambu Lab, Bambu PLA Basic Technical Data Sheet, Bambu Lab.
- [2] I. Drstvenšek in T. Brajlj, Dodajalna izdelava : Od hitre izdelave prototipov do 3D tiskane inovacije, Univerzitetna založba Univerze v Mariboru, 2020.
- [3] eSUN, PLA-ST Technical Data Sheet, Shenzhen Esun Industrial Co., Ltd.
- [4] N. Jayanth, K. Jaswanthraj, S. Sandeep, N. H. Mallaya, in S. R. Siddharth, Effect of heat treatment on mechanical properties of 3D printed PLA, *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials* 123, 104764, 2021.
- [5] F. Kartal in A. Kaptan, Effects of annealing temperature and duration on mechanical properties of PLA plastics produced by 3D Printing, *EMS* 7, 152–159, 2023.
- [6] M. Shbanah, M. Jordanov, Z. Nyikes, L. Tóth, in T. A. Kovács, The Effect of Heat Treatment on a 3D-Printed PLA Polymer's Mechanical Properties, *Polymers* 15, 1587, 2023.
- [7] H. Simmons, P. Tiwary, J. E. Colwell, in M. Kontopoulou, Improvements in the crystallinity and mechanical properties of PLA by nucleation and annealing, *Polymer Degradation and Stability* 166, 248–257, 2019.
- [8] H. E. Yalkin in A. N. Ozkan, Investigation of Crystal Structure Change and Mechanical Properties of 3D Printed PLA After Annealing, *Polymer Engineering & Science* 2026, no. 1–12.
- [9] H. Zhang, M. Liang, J. Yao, Y. Cao, Y. Wang, D. Wu, X. Liu, Q. Fu, in Y. Sun, Effect of Annealing on Structure and Mechanical Properties of 3D-Printed Polymer Composites, *Polymer Composites* 47, 1953–1969, 2026.
- [10] D. G. Zisopol, A. I. Portoaca, I. Nae, in I. Ramadan, A Comparative Analysis of the Mechanical Properties of Annealed PLA, *Engineering, Technology & Applied Science Research* 12, 8978–8981, 2022.



Razvoj in validacija metode končnih volumnov za 3D model liofilizacije v viali

Domen Godec¹, Matjaž Hriberšek¹, Jure Ravnik¹

Development and validation of a finite volume method for 3D model of vial lyophilization

Povzetek. V prispevku je obravnavana numerična osnova tridimenzionalnega modela za simulacijo liofilizacije v viali, zasnovana z metodo končnih volumnov. Razvita programska oprema temelji na celično centrirani diskretizaciji splošne konvektivno-difuzijske enačbe. Časovni člen je obravnavan z levo Eulerjevo shemo, difuzijski člen z neortogonalnim popravkom in rekonstrukcijo gradientov po metodi najmanjših kvadratov, konvektivni člen pa s soveterno shemo prvega reda. Validacija je izvedena na testnih primerih z znanimi analitičnimi rešitvami. Nadaljnji korak razvoja je vključitev modelov prenosa toplote in snovi za liofilizacijo ter primerjavo izračunov z eksperimentalnimi podatki.

Abstract. This paper describes the numerical foundation of a three-dimensional finite volume model for vial lyophilization. The solver is built on a cell-centered finite volume discretization of a general advection–diffusion equation. The transient term is treated with a Backward-Euler scheme, the diffusion term with non-orthogonal correction where gradient reconstruction is achieved with least-squares method, and the advective term with a first-order upwind scheme. The implementation is verified using analytical test cases with known exact solutions. The next stage of development will introduce the governing heat and mass transfer equations of lyophilization models and compare the numerical results with experimental data.

1 Uvod

Liofilizacija oziroma sušenje z zamrzovanjem je uveljavljen postopek sušenja, ki se uporablja predvsem za stabilizacijo formulacij, ki so v obliki vodne raztopine občutljive na temperaturo in dolgoročno nestabilne [5]. V farmacevtski industriji se proces običajno izvaja v steklenih vialah in je sestavljen iz treh glavnih korakov: zamrzovanja, primarnega sušenja in sekundarnega sušenja. Zamrzovanje določi začetno strukturo ledu in poroznost kasnejše suhe pogače, primarno

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

sušenje pa določa večino trajanja cikla, kjer je hitrost sublimacije hkrati omejena s prenosom toplote do sublimacijske fronte in s prenosom vodne pare iz produkta [6]. Med primarnim sušenjem sta kritična parametra temperatura produkta, ki mora ostati pod kritično temperaturo izbrane formulacije, in hitrost odstranjevanja vodne pare skozi že posušeno plast produkta ter skozi geometrijske ovire (viale in liofilizacijske komore) na poti do kondenzatorja [11]. Sublimacijska fronta ločuje zamrznjeno in porozno regijo, ter se tekom primarnega sušenja pomika proti dnu. Trenutek, ko v viali ostane le porozna snov, označuje pričetek sekundarne faze, kjer je desorbpcija s topljencem vezane vode glaven proces sušenja in je ključna za doseg zahtevane vlažnosti končnega produkta [5, 6].

Liofilizacija je zaradi dolgih procesnih časov, velikosti proizvodnih serij in visokih investicijskih stroškov opreme finančno zahteven proces. Načrtovanje, nadzor in optimizacija procesov je zato pomembna za manjšo porabo energije in zagotavljanja kvalitete procesa. Pri načrtovanju primarnega sušenja se običajno izbere ciljna temperatura produkta, ki je dovolj blizu dovoljeni meji formulacije, da je sušenje hitro, vendar še ne povzroči taljenja, kolapsa ali drugih sprememb pogače. Ta cilj se nato dosega z izbiro temperature police, tlaka v komori in trajanja posameznih korakov [5, 6]. Optimizacija industrijskega cikla temelji na kombinirani izvedbi laboratorijskih poskusov in numeričnih simulacij, nato pa na postopnem prenosu postopka na proizvodno raven. Največja izziva pri uporabi numeričnih modelov sta zagotoviti ustreznost modela pri spremenjenih pogojih in izbrati pravilno razmerje med računsko zahtevnostjo in natančnostjo modela [10].

Za zmanjšanje računske zahtevnosti simulacij celotnih industrijskih procesov se uporabljajo sklopljeni modeli, kjer je tokovno polje v komori opisano s 3D CFD modelom, procesi na ravni vial pa s poenostavljenimi 0D [2], 1D [3, 9, 10] ali 2D [8] modeli.

Namen dela je izdelava tridimenzionalnega modela procesov na ravni vial, ki bo omogočal natančen popis prenosa snovi in toplote med liofilizacijskim ciklom in implementacijo v večdimenzionalno sklopljen model. V tem prispevku je opisana numerična osnova in validacija razvite programske opreme.

2 Razvoj programske opreme

2.1 Generacija mreže

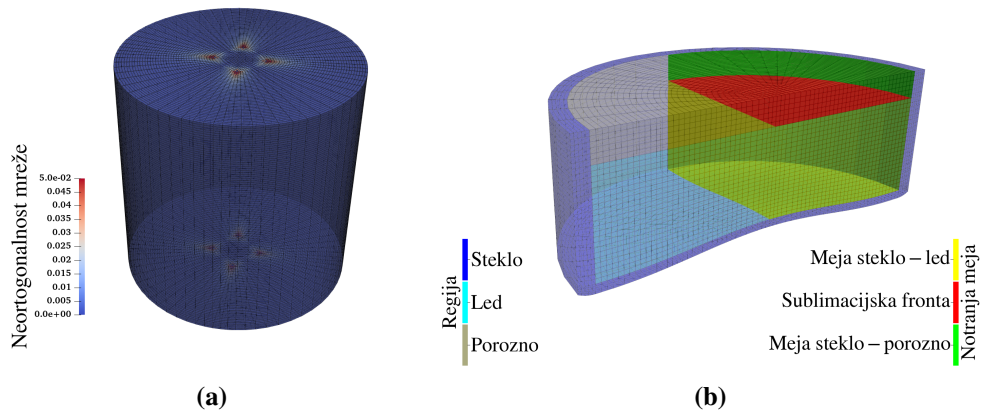
Pomemben del numeričnega modela liofilizacije je prilagajanje računske mreže, ki opisuje območji ledu in porozne osušene snovi, trenutni poziciji medfazne površine, zato je bil razvit namenski generator heksaedričnih mrež za geometrije vial. Postopek je naslednji; najprej se ustvari kvadrat, ki se do določene mere ekspandira, da zmanjša na vogalih prisotno neortogonalnost. Nato so dodani zunanji segmenti mreže. Na sliki 1a je prikazana tako generirana mreža cilindra, na kateri je tudi prikazana mera preostale neortogonalnosti. Standardne oblike vial, ki so uporabljene v industriji, imajo ukrivljeno dno. Za vialo zunanjega polmera r_{viala} se lahko

oblika dna popiše z enačbo

$$z_{\text{dvig}}(r) = \begin{cases} \frac{h_c}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi r}{r_s}\right) \right], & 0 \leq r < r_s, \\ 0, & r_s \leq r < r_e, \\ R_{\text{rob}} - \sqrt{R_{\text{rob}}^2 - (r - r_e)^2}, & r_e \leq r \leq r_{\text{viala}}, \end{cases} \quad (1)$$

kjer je geometrijski pomen parametrov naslednji; h_c predstavlja višino dviga v centru viala, r_s in r_e sta polmera, pri katerih se kontaktna površina viala prične in konča, R_{rob} pa predstavlja polmer kroga, kateremu sledi dvig zaobljenega roba viala.

Na sliki 1b je z označenimi regijami in notranjimi mejami prikazana mreža produkta med sušenjem za standardno vialo tipa 20R.



Slika 1: Primera generiranih mrež; a) cilindrična mreža s prikazom neortogonalnosti celic, b) mreža za tip viala 20R s prikazanimi regijami in notranjimi mejami.

2.2 Diskretizacija

Prenosni pojavi, s katerimi opišemo fizikalno dogajanje v procesu liofilizacije v viali, se lahko v splošnem opišejo s transportnimi enačbami za ohranitev mase, toplotne energije in snovi [7]. V nadaljevanju je tako predstavljena je diskretizacija splošne transportne enačbe za neznano skalarno polje u

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\beta} u) = \nabla \cdot (\gamma \nabla u) + \delta, \quad (2)$$

kjer je α koeficient časovnega člena, $\boldsymbol{\beta}$ hitrost toka tekočine, γ difuzijski koeficient in δ izvir oz. ponor.

Enačba (2) je diskretizirana z metodo končnih volumnov (MKV). Z integracijo po volumnu V_P , uporabo Gaussovega stavka in diskretizacijo časovnega člena z implicitno levo Eulerjevo

shemo, dobimo za celico P pri času t^{n+1}

$$|V_P| \alpha_P \frac{u_P^{n+1} - u_P^n}{\Delta t} + \sum_{f \in \mathcal{F}_P} F_f^{(k), n+1} = \sum_{f \in \mathcal{F}_P} F_f^{(d), n+1} + |V_P| \delta_P^{n+1}, \quad (3)$$

kjer je $\mathcal{F}_P$ množica ploskev celice, $F_f^{(k), n+1}$ in $F_f^{(d), n+1}$ konvektivni in difuzivni tok skozi ploskev f , člen δ iz enačbe (2) pa je obravnavan kot povprečje po končnem volumnu.

Vrednosti skalarnega polja in koeficientov so hranjeni v centrih celic. Ker MKV temelji na ohranitvi tokov preko ploskev celic, potrebujemo vrednosti v centru vsake ploskve. Te dobimo preko utežene linearne interpolacije

$$u_f = \lambda_f u_P + (1 - \lambda_f) u_N, \quad \lambda_f = \frac{|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_f|}{|\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_P|}. \quad (4)$$

kjer je λ_f interpolacijska utež, $\mathbf{x}_f$ središče ploskve, $\mathbf{x}_P$ središče celice P , $\mathbf{x}_N$ pa središče sosednje celice N . Ta shema se izjemoma ne uporablja za vrednosti polja u_f pri diskretizaciji konveksijskega člena, kjer je uporabljena sovetna shema, predstavljena z enačbo (6) v sledeči sekciji.

2.2.1 Konvektivni člen

Najprej je določena komponenta hitrosti v smeri pravkotno na ploskev f

$$\phi_f = (\boldsymbol{\beta}_f \cdot \mathbf{n}_f), \quad (5)$$

kjer je $\mathbf{n}_f$ pa enotski vektor normale na ploskev f . Vrednost $\phi_f > 0$ pomeni iztok iz celice P , $\phi_f < 0$ pa vtok v celico. Na notranji ploskvi med celicama P in N je vrednost u_f določena s sovetno shemo prvega reda

$$u_f = \begin{cases} u_P, & \phi_f \geq 0, \\ u_N, & \phi_f < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Konvektivni tok za ploskev površine S_f je torej

$$F_f^{(k)} \approx \max(\phi_f, 0) S_f u_P + \min(\phi_f, 0) S_f u_N. \quad (7)$$

Konvektivni člen je tako obravnavan implicitno; iztočna ploskev prispeva v diagonalni člen matrike, vtočna ploskev pa v sosednji stolpec, ki ustreza sovetni celici.

2.2.2 Difuzijski člen

Difuzijski tok je na ploskvi aproksimiran z

$$F_f^{(d)} \approx \gamma_f S_f (\nabla u)_f \cdot \mathbf{n}_f. \quad (8)$$

Ker so cilindrične heksaedrične mreže neortogonalne, uporabimo za diskretizacijo normalnega gradienta $(\nabla u)_f \cdot \mathbf{n}_f$ shemo neortogonalnega popravka. Za normalni vektor ploskve se lahko izvede dekompozicija na ortogonalni in neortogonalni del glede na smer med središčema celic.

$$\mathbf{n}_f^\perp = (\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{e}_d) \mathbf{e}_d, \quad \mathbf{n}_f^\parallel = \mathbf{n}_f - \mathbf{n}_f^\perp, \quad \mathbf{e}_d = \frac{\mathbf{d}_{PN}}{|\mathbf{d}_{PN}|}, \quad (9)$$

Ortogonalni del je obravnavan implicitno z razliko med sosednjima celicama, neortogonalni popravek pa eksplicitno z interpoliranim gradientom:

$$F_f^{(d)} \approx \gamma_f S_f \left[\frac{\mathbf{n}_f \cdot \mathbf{e}_d}{|\mathbf{d}_{PN}|} (u_N - u_P) + (\nabla u)_f^{\text{interp}} \cdot \mathbf{n}_f \right]. \quad (10)$$

Gradienti v celicah so rekonstruirani z metodo najmanjših kvadratov.

Sistem enačb je reševan v t.i. nelinearni zanki rekonstrukcije gradientov, kjer se v vsaki iteraciji izvede posodobitev gradientov na podlagi najnovejše rešitve polja.

2.2.3 Robni pogoji in notranje meje

V spodnji tabeli 1 so prikazani prispevki robnih ploskev difuzijskega in konvektivnega člena sistemski matriki. u_D je predpisana vrednost polja za Dirichletov pogoj, q_N predpisan tok za Neumannov pogoj, $d_{Pf}^\perp$ normalna razdalja od centera celice do robne ploskve in u_{vtok} predpisana vrednost polja na vtoku.

Tabela 1: Prispevki robnih pogojev za difuzijski in konvektivni člen.

Prispevek	Dirichlet	Neumann
Difuzijski člen	$F_f^{(d)} \approx \gamma_f S_f \frac{1}{d_{Pf}^\perp} (u_D - u_P)$	$F_f^{(d)} \approx q_N S_f$
Konvektivni člen	$F_f^{(k)} \approx \phi_f S_f u_D$	$F_f^{(k)} \approx \begin{cases} \phi_f S_f u_P, & \phi_f \geq 0, \\ \phi_f S_f u_{\text{vtok}}, & \phi_f < 0. \end{cases}$

Za notranje meje med regijami je zahtevan pogoj zveznosti. Slednje je doseženo s t.i. medregijsko zanko. Ta zaporedno rešuje posamezne regije, notranja meja pa se pri sestavi lokalnega sistema obravnava kot robni prispevek, ki je določen iz trenutno znane rešitve sosednje regije. V kolikor sosednja regija v iteraciji še ni rešena, se ploskev obravnava z Dirichletovim, v nasprotnem primeru pa z Neumannovim pogojem.

Po rešitvi vseh regij se zveznost polja na notranjih mejah preveri z izračunom RMS, kjer je N_I število ploskev f v notranji meji I , $u_{f,P}$ in $u_{f,N}$ pa ekstrapolirani vrednosti polja na mejo iz sosednjih regij.

$$RMS_I = \left[\frac{1}{N_I} \sum_{f \in I} (u_{f,P} - u_{f,N})^2 \right]^{1/2}, \quad \begin{aligned} u_{f,P} &= u_P + \nabla u_P \cdot (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_P), \\ u_{f,N} &= u_N + \nabla u_N \cdot (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_N). \end{aligned} \quad (11)$$

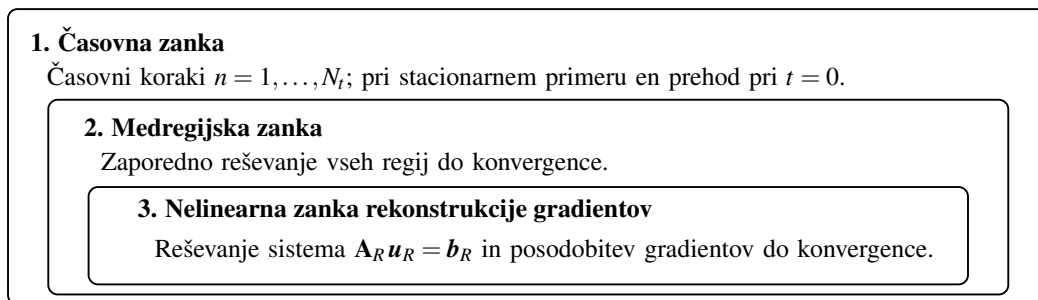
Iteracije se ponavljajo, dokler RMS_I ne pade pod predpisano toleranco.

2.3 Algoritem

Razvita programska oprema za vsako regijo R v mreži sestavi lokalni linearni sistem

$$\mathbf{A}_R \mathbf{u}_R = \mathbf{b}_R, \quad (12)$$

ki je rešen z metodo BiCGStab in ILU-predpogojevanjem, implementirana s C++ knjižnico Eigen [1]. Na sliki 2 je prikazana struktura glavnih zank v razvitem algoritmu.



Slika 2: Shema algoritma.

3 Validacija

Razvita programska oprema je validirana z analitičnimi rešitvami transportne enačbe, ki so prikazane v tabeli 2. Simulacije so bile izvedene na cilindričnih heksaedričnih mrežah (primer na sliki 1a) za različne orientacije in velikosti celic. Na osnovnih ploskvah je bil predpisan Dirichletov robni pogoj, na plašču pa Neumannov robni pogoj. Robne vrednosti polja so bile določene iz izbrane analitične funkcije v središčih robnih ploskev, pri čemer je $u_D = u_{\text{analit}}(\mathbf{x}_f, t)$, Neumannov pogoj pa $\mathbf{n}_f \cdot \nabla u_{\text{analit}}(\mathbf{x}_f, t)$.

Tabela 2: Analitične funkcije za validacijo diskretizacije transportne enačbe.

Primer	u_{analit}	Koeficienti	Namen testiranja
1 & 2	x & $-z + 1$	$\gamma = 1$	stacionarna difuzija
3	$10x^2 + 20y^2 + 30z^2$	$\gamma = 1, \delta = 120$	stacionarna difuzija z virom
4	$2 - 2/x$	$\gamma = x^2$	stacionarna difuzija, odvisnost $\gamma(x)$
5	2^x	$\gamma = \frac{1}{u}$	stacionarna difuzija, odvisnost $\gamma(u)$
6	$e^{-k^2 t} \sin(kx)$	$\alpha = 1, \gamma = 1$	časovno odvisna difuzija
7	$1 - \frac{1 - e^{px}}{1 - e^p}$	$\beta = (p, 0, 0), \gamma = 1$	stacionarna transportna enačba

Napaka rešitve programske opreme je bila izračunana s korenom srednje kvadratne napake z enačbo (13),

$$RMS = \left[\frac{1}{N_C} \left(\sum_{p=1}^{N_C} (u(\mathbf{x}_p, t) - u_{\text{analit}}(\mathbf{x}_p, t))^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (13)$$

kjer je N_C število celic, $\mathbf{x}_p$ središče celice in t čas vrednotenja funkcije, uporabljen pri časovno odvisnem primeru.

Za vrednotenje ustreznosti implementacije diskretizacijskih shem je RMS prikazan v odvisnosti od povprečne velikosti celice h . Za prikaz rezultatov je uporabljena logaritemska skala na obeh oseh.

Red metode p je izračunan na podlagi rezultatov z $p = \log_{h_1/h_2} (RMS_1/RMS_2)$. Iz sledeče zveze je pri znanem redu mogoče izračunati tudi teoretično napako, $RMS_{\text{teor}} = RMS_1 (h_2/h_1)^p$. Ta je za $p = 1$ in $p = 2$ prav tako prikazana na logaritmični skali primarne y-osi, izračunan red p pa je vrisan na sekundarno y-os.

3.1 Stacionarna difuzija na mrežah uniformne regije

Najprej so bili izvedeni testi stacionarne difuzije, pri katerih je bil rešen sistem enačb, dobljen z diskretizacijo enačbe

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla u) + \delta = 0. \quad (14)$$

Testni funkciji $u_{\text{analit}} = x$ in $u_{\text{analit}} = -z + 1$ predstavljata linearni analitični rešitvi. Zaradi enostavnosti primera spremljanje numerične napake ne kaže sistematične odvisnosti od velikosti celice, temveč povsem od izbrane tolerance za zaključitev nelinearne zanke.

Funkcija $u_{\text{analit}} = 10x^2 + 20y^2 + 30z^2$ predstavlja parabolično rešitev, pri kateri je treba upoštevati izvorni člen $\delta = 120$. V nasprotju z linearnima primeroma napaka jasno pada z manjšanjem velikosti celice, kot je prikazano na sliki 3a. Izračunan red je na grobih mrežah nižji, nato pa se z zmanjševanjem velikosti celice približuje drugemu redu, saj postane pri večjem številu celic prispevek neortogonalnih korekcij izrazitejši.

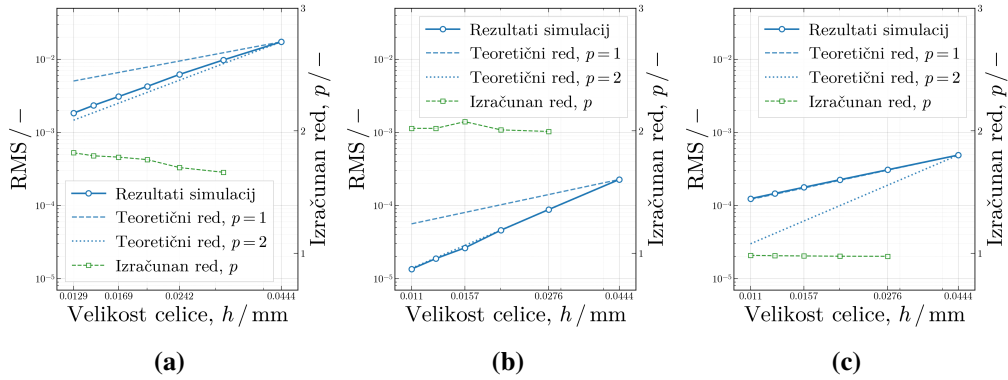
Funkcija $u_{\text{analit}} = 2 - 2/x$ preverja rešitev pri prostorski odvisnosti difuzivnosti $\gamma = x^2$. Primer je bil rešen v osnovni orientaciji in po zasuku mreže za 90° okrog y-osi. Brez zasuka se sprememba polja pojavlja v radialni smeri, kjer je prisoten vpliv neortogonalnosti celic zaradi neizogibnega popačenja pri mreženju cilindrskega volumna, kot je prikazano na sliki 1a. Spreminjanje napake sledi enakemu vzorcu, kakor na sliki 3a; z manjšo velikostjo celice se red postopno približuje drugemu redu. Po zasuku je sprememba polja poravnana z osjo cilindra, kjer neortogonalne napake praktično ni, zato napaka pada z drugim redom skozi celotno testirano območje, kot prikazano na sliki 3b.

Funkcija $u_{\text{analit}} = 2^x$ preverja rešitev, kjer je difuzivnost odvisna od polja, $\gamma = 1/u$. Rezultati, prikazani na sliki 3c, kažejo napako, ki pada s prvim redom. Slednje je pričakovano, saj je v primeru odvisnosti $\gamma(u)$ v vsaki iteraciji nelinearne zanke potrebna vrednost polja na robni ploskvi za Neumannov robni pogoj. V razvitem algoritmu je v ta namen uporabljena ekstrapolacija prvega reda iz sosednje celice. Pri zasuku za 90° okrog y-osi je analitični difuzijski tok $\mathbf{n}_f \cdot \nabla u_{\text{analit}}(\mathbf{x}_f)$ skozi Neumannovo stransko ploskev enak nič in napaka se zmanjšuje z enakim vzorcem drugega reda, kot prikazano na sliki 3b.

3.2 Nestacionarna difuzija na mrežah uniformne regije

Izvedene so bile simulacije nestacionarne difuzije, pri katerih je bil upoštevan tudi časovno odvisni člen. Rešen je bil sistem enačb, dobljen z diskretizacijo enačbe

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (\gamma \nabla u) + \delta. \quad (15)$$



Slika 3: Numerična in teoretična napaka ter izračunan red; a) funkcija 3, zasuk za 90° okrog y-osi, b) funkcija 4, zasuk za 90° okrog y-osi, c) funkcija 5, zasuk za 60° okrog y-osi.

Funkcija $u_{\text{analit}} = \exp(-k^2 t) \sin(kx)$ predstavlja s časom t pojemajočo sinusoido, kjer parameter k določa frekvenco in intenziteto pojemanja. Začetno polje je bilo inicializirano z analitično rešitvijo pri $t = 0$, čas simulacije t_{sim} pa je bil izbran tako, da je končna amplituda sinusoide primerljiva med različnimi vrednostmi k ; npr. za $k = 1$ je izbran $t_{\text{sim}} = 1.5$, za $k = 8$ pa $t_{\text{sim}} = 0.025$. Število časovnih korakov je konstantno, in sicer 50, 200 in 3200. Na sliki 6a so prikazani rezultati simulacij za velik, srednji in majhen časovni korak Δt pri $k = 1$. Napaka rešitve je odvisna od velikosti celice h , časovnega koraka Δt in faktorja k ; z zmanjševanjem Δt se red napake približuje drugemu redu. Večji k pomeni hitrejše prostorsko spreminjanje rešitve, zato je absolutna napaka pri $k = 8$ večja, vendar se zaradi precej manjšega časovnega koraka bolje približa drugemu redu.

3.3 Stacionarna transportna enačba na mrežah uniformne regije

V zadnjem primeru simulacij na mreži uniformne regije je bil reševan sistem enačb za stacionarno transportno enačbo:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\beta} u) = \nabla \cdot (\gamma \nabla u) + \delta. \quad (16)$$

Funkcija $u_{\text{analit}} = 1 - (1 - \exp(px))/(1 - \exp(p))$ opisuje enodimenzionalni stacionarni transport s koeficientoma transportne enačbe $\boldsymbol{\beta} = (p, 0, 0)$ in $\gamma = 1$; torej sta prisotni konvekcija in difuzija. Primer je zastavljen na intervalu $x \in [0, 1]$ z Dirichletovima pogojeoma $u(0) = 1$ in $u(1) = 0$, pri čemer tok $\boldsymbol{\beta}$ poteka v smeri pozitivne osi x , kot je shematsko prikazano na sliki 4.

$$\begin{array}{c}
 \boldsymbol{\beta} = (p, 0, 0) \\
 \underbrace{u_D(0) = 1 \quad \text{~~~~~} \quad u_D(1) = 0}_{\text{~~~~~}}
 \end{array}$$

Slika 4: Enodimenzionalni stacionarni analitični model za testiranje transportne enačbe.

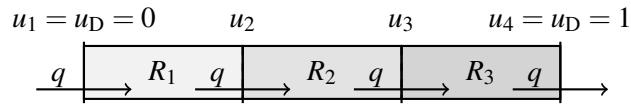
V testnih primerih je uporabljena cilindrična mreža, zato je 1D postavitve dosežena z zasukom

mreže za 90° okrog y-osi.

Parameter p predstavlja Pecletovo število, torej razmerje med konvektivnim in difuzijskim transportom. V limiti $p \rightarrow 0$ rešitev preide v linearen difuzijski profil, pri večjih vrednostih p pa konvekcija povzroči izrazitejšo ukrivitev profila v smeri toka. Primerjava profilov vzdolž x-osi za različne vrednosti p kaže, da numerična rešitev sledi analitični krivulji, kot je prikazano na sliki 6b. Zagon simulacij za različne velikosti celic potrди, da je aproksimacija rešitve natančnejša pri manjši celici.

3.4 Stacionarna difuzija na neuniformni mreži

V zaključnem testnem primeru je obravnavana stacionarna difuzija na mreži, sestavljeni iz treh regij R_i različnih difuzivnosti $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 4$ in $\gamma_3 = 12$. S tem se preverja sklopitev regij, kjer morata biti na notranjih mejah izpolnjeni zveznost polja in enakost toka, v definiranem tolerančnem območju. Na sliki 5 je prikazana shema enodimenzionalnega modela, kjer sta



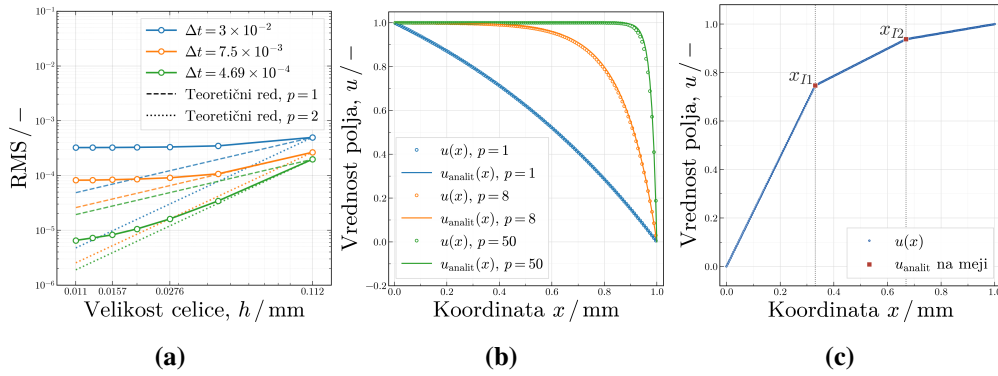
Slika 5: Enodimenzionalni model za preverjanje rešitve na neuniformni mreži.

Dirichletova robna pogoja $u_1 = 0$ in $u_4 = 1$. Vrednosti na notranjih mejah, u_2 in u_3 , sta analitično izračunani iz sistema enačb, ki ga je moč pridobiti iz spodnje zakonitosti enakosti difuzijskega toka q skozi regije:

$$q = \frac{u_1 - u_2}{d_1} \gamma_1 = \frac{u_2 - u_3}{d_2} \gamma_2 = \frac{u_3 - u_4}{d_3} \gamma_3, \quad (17)$$

kjer je d_i dolžina regije i .

Analitično izračunani vrednosti na mejah med regijami sta na sliki 6c prikazani skupaj s profilom polja, pridobljenim z razvito programsko opremo. Rezultati kažejo na ustrezno porazdelitev polja po posameznih regijah.



Slika 6: Rezultati testnih primerov; a) Numerična in teoretična napaka funkcije 6, s parametrom $k = 1$, b) funkcija 7, profili numerične in analitične rešitve za velikost celice $h = 1.1 \times 10^{-2}$, c) profil polja na neuniformni mreži in primerjava z analitično rešitvijo za velikost celice $h = 1.1 \times 10^{-2}$.

Napaka *RMS* je ocenjena na obeh notranjih mejah in se zaradi uporabe ekstrapolacije prvega reda za aproksimacijo vrednosti polja na meji zmanjšuje s pričakovanim prvim redom,

4 Vodilne enačbe

Liofilizacija v viali je obravnavana kot sklopljen prenos toplote in mase [4, 5, 10]. V tri dimenzionalni računski mreži viala je območje je razdeljeno na stekleno regijo viala in območje produkta, ki je ločen na posušeno porozno in zamrznjeno regijo, med katerima se premika sublimacijska fronta. V nadaljevanju so zapisane variacije splošne transportne enačbe (2), kjer z uporabo različnih koeficientov $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zapišemo ohranitvene enačbe za različne regije.

V porozni regiji je ohranitev energije zapisana v spodnji obliki splošne transportne enačbe

$$\overbrace{\rho_1 c_{p,1}}^{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\overbrace{(N_v + N_i) c_{p,g}}^{\beta} T) = \nabla \cdot (\overbrace{\lambda_1}^{\gamma} \nabla T) + \overbrace{\Delta H_v \rho_{1,p}}^{\delta} \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (18)$$

kjer se toplota prenaša s prevodom in s konvekcijo plinske zmesi vodne pare ter inertnega plina, dodatni člen pa opisuje ponor toplote zaradi desorpcije vezane vode.

V regijah trdnega stanja je prenos toplote reduciran le na prevod toplote, zato je ohranitev energije predstavljena le z difuzijskim in časovno odvisnim členom

$$\underbrace{\overbrace{\rho_2 c_{p,2}}^{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Zamrznjena regija}} = \nabla \cdot (\overbrace{\lambda_2}^{\gamma} \nabla T), \quad \underbrace{\overbrace{\rho_3 c_{p,3}}^{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Steklena regija}} = \nabla \cdot (\overbrace{\lambda_3}^{\gamma} \nabla T), \quad \beta = \delta = 0. \quad (19)$$

Na sublimacijski fronti sta porozna in zamrznjena regija povezani z enačbo (20), v kateri je

ključen ponor toplote zaradi sublimacije in upoštevanje premikajoče sublimacijske fronte

$$\underbrace{\lambda_2 \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_2 + v_n \rho_2 c_{p,2} T}_{\text{Zamrznjena regija}} = \underbrace{\lambda_1 \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_1 + v_n \rho_1 c_{p,1} T - \Delta H_s N_{v,n} - N_{v,n} c_{p,g} T}_{\text{Porozna regija}} \Big|_1, \quad (20)$$

kjer je hitrost fronte v_n določena z razmerjem med normalnim masnim tokom vodne pare $N_{v,n}$ in razliko efektivnih gostot med zamrznjeno in porozno regijo.

Masni transport je prisoten le v porozni regiji, v kateri sta vodna para in inertni plin obravnavana kot idealna plina. Vodilni enačbi za ohranitev mase sta

$$\underbrace{\varepsilon \frac{M_v}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_v}{T} \right) + \nabla \cdot N_v = -\rho_{1,p} \frac{\partial C}{\partial t}}_{\text{Vodna para}}, \quad \underbrace{\varepsilon \frac{M_i}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_i}{T} \right) + \nabla \cdot N_i = 0}_{\text{Inertni plin}}. \quad (21)$$

V zgornjih enačbah nastopata temperatura T in koncentracija C vezane vode v porozni regiji. $c_{p,i}$ je efektivna specifična toplota, λ_i toplotna prevodnost in ρ_i efektivna gostota posamezne regije ter $\rho_{1,p}$ gostota porozne strukture. N_v in N_i sta tokovna polja vodne pare in inertnega plina, $c_{p,g}$ specifična toplota njune plinske mešanice, M_v in M_i njuna molarna masa in p_v in p_i pripadujoča parcialna tlaka v porozni regiji. ΔH_v in ΔH_s sta entalpiji povezani s desorbcijo in sublimacijo.

5 Zaključek

Razvita programska oprema predstavlja validirano numerično osnovo za reševanje regijsko sklopljenih transportnih enačb na heksaedričnih mrežah. Naslednji korak je implementacija vodilnih enačb za prenos toplote in snovi, predstavljene v sekciji 4 ter validacija modela na podlagi eksperimentalnih podatkov za liofilizacijo posnetega mleka [4, 5, 10]. V nadaljnjem delu bo razvit model sklopljen s tridimenzionalnim CFD modelom liofilizacijske komore [2].

Literatura

- [1] G. Guennebaud, B. Jacob, et al. Eigen. <https://libeigen.gitlab.io>, 2010.
- [2] B. Kamenik, M. Hriberšek, and M. Zadravec. Determination of pressure resistance of a partially stoppered vial by using a coupled CFD-0D model of lyophilization. *European Journal of Pharmaceutics and Biopharmaceutics*, 175:53–64, June 2022.
- [3] B. Kamenik, J. Ravnik, T. Gomboc, M. Zadravec, and M. Hriberšek. A coupled multilevel vial lyophilization model for the pressure coupling in a freeze dryer. *Applied Thermal Engineering*, 277:126822, Oct. 2025.
- [4] W. Mascarenhas, H. Akay, and M. Pikal. A computational model for finite element analysis of the freeze-drying process. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148(1-2):105–124, Aug. 1997.
- [5] M. J. Millman, A. I. Liapis, and J. M. Marchello. An analysis of the lyophilization process using a sorption-sublimation model and various operational policies. *AIChE Journal*, 1985.

- [6] M. Pikal, M. Roy, and S. Shah. Mass and Heat Transfer in Vial Freeze-Drying of Pharmaceuticals: Role of the Vial. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 73(9):1224–1237, Sept. 1984.
- [7] M. Ramšak and M. Hriberšek. Vial Wall Effect on Freeze-Drying Speed. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 113(5):1275–1284, May 2024.
- [8] M. Ramšak, J. Ravnik, M. Zadravec, M. Hriberšek, and J. Iljaž. Freeze-drying modeling of vial using BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 77:145–156, Apr. 2017.
- [9] M. Ramšak, M. Zadravec, J. Ravnik, J. Iljaž, M. Avanzo, K. Kočevár, Š. Irman, M. Cegnar, I. Golobic, A. Sitar, and M. Hriberšek. Numerical and experimental modeling of lyophilization of lactose and mannitol water solutions in vials. *Computational Thermal Sciences: An International Journal*, 12(5):401–415, 2020.
- [10] J. Ravnik, I. Golobič, A. Sitar, M. Avanzo, Š. Irman, K. Kočevár, M. Cegnar, M. Zadravec, M. Ramšak, and M. Hriberšek. Lyophilization model of mannitol water solution in a laboratory scale lyophilizer. *Journal of Drug Delivery Science and Technology*, 45:28–38, June 2018.
- [11] X. Tang and M. J. Pikal. Design of Freeze-Drying Processes for Pharmaceuticals: Practical Advice. *Pharmaceutical research*, 21(2):191–200, 2004.



Numerična analiza vpliva procesnih parametrov na enakomernost zamrzovanja vial pri liofilizaciji s kontrolirano nukleacijo

Matija Založnik¹, Blaž Kamenik¹, Matjaž Hriberšek¹, Matej Zadavec¹

Numerical analysis of process parameter influence on vial freezing uniformity during controlled nucleation freeze drying

Povzetek. Liofilizacija je postopek sušenja, ki se pogosto uporablja v farmacevtski industriji za ohranjanje termično občutljivih produktov. Faza zamrzovanja določa strukturo ledu in s tem učinkovitost celotnega procesa, saj velikost ledenih kristalov neposredno vpliva na upor toka vodne pare med primarnim sušenjem. V tem delu je predstavljen sklopljen 0D-3D CFD model, ki združuje metodo koncentriranih parametrov za modeliranje zamrzovanja posamezne vial s 3D CFD modelom sušilne komore. Model je bil uporabljen za analizo vpliva kontrolirane nukleacije in procesnih parametrov na enakomernost zamrzovanja serije vial. Ugotovljeno je bilo, da med analiziranimi parametri masni tok termalnega olja najbolj vpliva na enakomernost zamrzovanja z zmanjšanjem neenakomernosti za približno 10 %, medtem ko zadrževalna temperatura in hitrost ohlajanja olja vplivata le za približno 1 %.

Abstract. Lyophilization is a drying process widely used in the pharmaceutical industry to preserve thermally sensitive products. The freezing stage of the process is critical as it determines the ice crystal structure, which directly governs mass transfer resistance during primary drying. This work presents a coupled 0D-3D CFD model combining a lumped parameter vial freezing model with a 3D CFD model of the freeze dryer chamber. The model was applied to investigate the effect of controlled nucleation and key process parameters on freezing uniformity across a vial batch. It was found that among the parameters studied, the thermal oil mass flow rate has the most significant influence, reducing freezing non-uniformity by approximately 10 %, while the hold temperature and oil cooling rate each contribute only approximately 1 %.

1 Uvod

Liofilizacija je pogosto uporabljen postopek sušenja farmacevtskih produktov, pri katerem je zaradi termične občutljivosti materialov potrebno odstranjevanje vode pri nizkih temperaturah

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

in tlakih. Proces je sestavljen iz faze zamrzovanja, primarnega sušenja in sekundarnega sušenja. Čeprav zamrzovanje ni najdaljša faza procesa, ima pomemben vpliv na nadaljnji potek sušenja, saj določa strukturo ledenih kristalov in posledično poroznost posušene pogače. Velikost ledenih kristalov neposredno vpliva na upor toka vodne pare med primarnim sušenjem, zato neenakomerno zamrzovanje posameznih vial vodi do razlik v hitrosti sušenja, temperaturi produkta in končni kakovosti izdelka [6, 9].

Pri klasičnem zamrzovanju je pojav nukleacije stohastičen, zato v posameznih vialah pride do nukleacije pri različnih stopnjah podhladitve, kar povzroči razlike v rasti ledenih kristalov. Kontrolirana nukleacija omogoča hkratno sprožitev nukleacije pri izbrani temperaturi in s tem zmanjša neenakomernost med vialami [9, 4]. Kljub temu kontrolirana nukleacija sama po sebi ne zagotavlja popolnoma enakomernega zamrzovanja, saj na časovni potek temperature produkta vplivajo tudi lokalni pogoji prenosa toplote med vialo, polico, okoliškim plinom, stenami komore in sosednjimi vialami.

Numerično modeliranje je pomembno orodje za analizo različnih prenosnih pojavov, ki se pojavljajo skozi celoten proces liofilizacije [3, 7, 1]. Modeli koncentriranih parametrov omogočajo učinkovit opis zamrzovanja posamezne vial, medtem ko 3D modeli računalniške dinamike tekočin (CFD) omogočajo obravnavo prostorskih prenosnih pojavov v liofilizatorju. V tem delu je predstavljen sklopljen 0D-3D CFD model, pri katerem 0D model opisuje energijsko bilanco in nastanek ledu v posameznih vialah, 3D CFD model pa opisuje tok termalnega olja in prenos toplote med vialo, polico liofilizatorja in okoliškim zrakom. Namen dela je analizirati vpliv mase toka olja, zadrževalne temperature in hitrosti ohlajanja olja na enakomernost zamrzovanja serije vial pri liofilizaciji s kontrolirano nukleacijo.

2 Numerično modeliranje faze zamrzovanja

2.1 0D model zamrzovanja

Modeliranje zamrzovanja raztopine se izvede z metodo koncentriranih parametrov, kjer s pomočjo enačbe ohranitve energije modeliramo časovno spreminjanje temperature produkta. Osnovna enačba, ki jo rešujemo v vsakem časovnem koraku, je:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\dot{Q} + H_f \frac{dm_i}{dt}}{mc_p} \quad (1)$$

kjer je $\dot{Q}$ skupni toplotni tok na nivoju vial, m je masa raztopine, c_p je specifična toplota, H_f je latentna toplota, $\frac{dT}{dt}$ je sprememba temperature ter $\frac{dm_i}{dt}$ je sprememba mase ledu v časovnem koraku. Enačbo 1 rešujemo z eksplisitno Eulerjevo metodo. Ko raztopina doseže določeno stopnjo podhladitve, se v njej sproži nukleacija, ki nenadno poviša temperaturo do ravnovesne temperature raztopine. Ta se izračuna po spodnji enačbi:

$$T_f = T_f^0 - \frac{k_f}{M_s} \left(\frac{m_s}{m_w - m_i} \right) \quad (2)$$

kjer sta T_f in T_f^0 ravnovesni temperaturi raztopine in topila, k_f je krioskopska konstanta topila, M_s je molska masa topljenca in m je masa, kjer indeksi s , w in i označujejo topilo, topljenec in

led. Med nukleacijo se tvori del ledu, ki je sorazmeren s stopnjo podhladitve raztopine in se izračuna s spodnjo enačbo:

$$(T_{nuc} - T_f) c_p m = H_f m_i \quad (3)$$

kjer je T_{nuc} temperatura nukleacije. Skupni toplotni tok na nivoju vial je sestavljen iz več členov:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{Bot} + \dot{Q}_{Side} + \dot{Q}_{Top} + \dot{Q}_{Int} \quad (4)$$

kjer je $\dot{Q}_{Bot}$ toplotni tok skozi dno, $\dot{Q}_{Side}$ skozi stran in $\dot{Q}_{Top}$ skozi vrh vial, $\dot{Q}_{Int}$ pa toplotni tok med sosednjimi vialami. Skozi dno vial se toplota odvaja skozi neposredni stik med vialo in polico ter skozi območje z zračno režo. Toplotni tok skozi dno izračunamo kot:

$$\dot{Q}_{Bot} = (K_{v,Bot,A} A_{Cont.} + K_{v,Bot,B} (A_{Bot} - A_{Cont.})) (T_{sh} - T) \quad (5)$$

kjer sta $K_{v,Bot,A}$ in $K_{v,Bot,B}$ koeficienta prenosa toplote skozi kontaktno površino in zračno režo, $A_{Cont.}$ in A_{Bot} sta kontaktna površina in celotna spodnja površina vial ter T_{sh} je temperatura police. Koeficienta prenosa toplote sta izračunana kot:

$$K_{v,Bot,A} = K_{v,Exp} \frac{A_{Bot}}{A_{Cont.}} \quad (6)$$

in

$$K_{v,Bot,B} = \left(\frac{L_{Bot}}{\lambda_{Zrak}} + \frac{L_{Steklo}}{\lambda_{Steklo}} + \frac{L_{Led}}{\lambda_{Led}} \right)^{-1} \quad (7)$$

kjer je $K_{v,Exp}$ eksperimentalno določena vrednost iz literature [7], L_i je karakteristična dolžina materiala, skozi katerega poteka prenos toplote in λ_i je toplotna prevodnost tega materiala. Na strani vial se toplota prenaša s prevajanjem skozi steno vial, naravno konvekcijo zraka v sušilni komori in toplotnim sevanjem. Toplotni tok skozi stran vial se izračuna kot:

$$\dot{Q}_{Side} = A_{Side} (K_{v,Side,A} (T_{\infty} - T) + K_{v,Side,B} (T_{Stena} - T)) \quad (8)$$

kjer je A_{Side} stranska površina vial, $K_{v,Side,A}$ koeficient prenosa toplote, ki združuje prevajanje skozi steno vial in naravno konvekcijo, ter $K_{v,Side,B}$ koeficient prenosa toplote s toplotnim sevanjem, T_{∞} in T_{Stena} pa sta temperatura okoliškega zraka in temperatura sten komore. Koeficient $K_{v,Side,A}$ izračunamo kot:

$$K_{v,Side,A} = \left(\frac{L_{Steklo}}{\lambda_{Steklo}} + \frac{1}{K_{v,Zrak}} \right)^{-1} \quad (9)$$

kjer $K_{v,Zrak}$ predstavlja koeficient prenosa toplote zaradi naravne konvekcije. Tega določimo z naslednjo korelacijo Nusseltovega števila:

$$Nu = \frac{K_{v,Zrak} H_{Fill}}{\lambda_{Zrak}} = 0,59 (GrPr)^{0,25} \quad (10)$$

kjer je H_{Fill} višina raztopine. Z upoštevanjem izrazov za Grashofovo in Prandtlovo število ter preureditvijo enačbe 10 dobimo izraz za izračun $K_{v,Zrak}$:

$$K_{v,Zrak} = 0,59 \left(\frac{g \beta H_{Fill}^3 \rho_{Zrak} c_{p,Zrak} (T_{Steklo} - T_{\infty})}{\nu_{Zrak} \lambda_{Zrak}} \right)^{0,25} \frac{\lambda_{Zrak}}{H_{Fill}} \quad (11)$$

kjer je g gravitacijski pospešek, β je volumski koeficient toplotne razteznosti, ρ gostota, T_{Steklo} temperatura zunanje stene vial in ν kinematična viskoznost. Koeficient prenosa toplote povezan s toplotnim sevanjem izračunamo z naslednjo enačbo:

$$K_{v,Side,B} = \sigma F_{12,b} (T_{Wall} + T) (T_{Wall}^2 + T^2) \quad (12)$$

kjer je σ Stefan-Boltzmannova konstanta in $F_{12,b}$ vidni faktor, izračunan kot:

$$F_{12,b} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{\epsilon_{Steklo}} - 1 \right) + \frac{A_{Side}}{A_{Wall}} \left(\frac{1}{\epsilon_{Stena}} - 1 \right) \right]} \quad (13)$$

kjer je ϵ toplotna emisivnost, katere vrednost za steklene vial znaša 0,78 in za stene komore 0,18 [8] in A_{Wall} površina stene komore. Ker je površina stene komore mnogo večja od stranske površine vial ($A_{Side} \ll A_{Wall}$), razmerje površin teži k nič, zaradi česar lahko zgornji izraz poenostavimo:

$$F_{12,b} = \epsilon_{Steklo} \quad (14)$$

Fizikalno to pomeni, da ima posamezna viala, zaradi svoje majhne površine v primerjavi s komoro, zanemarljiv vpliv na sevalno izmenjavo.

Na vrhu produkta predpostavimo, da se toplota prenaša le z naravno konvekcijo. Toplotni tok na vrhu izračunamo kot:

$$\dot{Q}_{Top} = K_{v,Top} A_{Top} (T_{\infty} - T) \quad (15)$$

kjer sta $K_{v,Top}$ koeficient prenosa toplote na vrhu produkta in A_{Top} zgornja površina produkta. Koeficient prenosa toplote se podobno kot na strani vial izračuna iz Nusseltovega števila, iz katerega dobimo naslednji izraz:

$$K_{v,Top} = 0,53 \left(\frac{g \beta D_{Top}^3 \rho_{Zrak} c_{p,Zrak} (T - T_{\infty})}{\nu_{Zrak} \lambda_{Zrak}} \right)^{0,25} \frac{\lambda_{Zrak}}{H_{Fill}} \quad (16)$$

kjer je D_{Top} notranji premer vial. Nazadnje izračunamo toplotni tok med sosednjimi vialami z naslednjo enačbo:

$$\dot{Q}_{Int} = \sum_i^j A_{Int,i} q_{Int,i} \quad (17)$$

kjer sta A_{Int} mejna površina med sosednjimi vialami in q_{Int} gostota toplotnega toka med sosednjimi vialami. Za sosednji viali n in m gostoto toplotnega toka izračunamo kot:

$$q_{Int} = K_{v,Int,nm} (T_m - T_n) \quad (18)$$

kjer je $K_{v,Int,nm}$ koeficient prenosa toplote med sosednjima vialama. Tega izračunamo s predpostavko, da se toplota med vialami prenaša le s prevodom skozi material z naslednjim izrazom:

$$K_{v,Int,nm} = \left(2 \frac{L_{Steklo}}{\lambda_{Steklo}} + \frac{L_{eff}}{\lambda_{Zrak}} \right)^{-1} f_S \quad (19)$$

kjer je L_{eff} efektivna razdalja reže med vialama in je funkcija geometrije in postavitve vial. Ker predpostavka, omenjena zgoraj, podceni dejansko vrednost koeficienta prenosa toplote, enačbi dodamo skalirni faktor f_S , določen s pomočjo CFD simulacij na geometriji štirih sosednjih vial. Za poenostavitev je produkt znotraj viale modeliran kot trdna faza, pri čemer je v eni viali predpisan volumski toplotni izvor. Pri različnih toplotnih izvorih in temperaturah pololic smo računali skalirni faktor kot:

$$f_S = \frac{K_{v,CFD}}{K_{v,cond}} \quad (20)$$

kjer je $K_{v,CFD}$ koeficient prenosa toplote med sosednjimi vialami, določen s CFD in $K_{v,cond}$ analitični koeficient prenosa toplote med sosednjima vialama, kjer upoštevamo samo prevod skozi material. Za namen modeliranja faze zamrzovanja smo izbrali povprečno vrednost skalirnih faktorjev. Kot validacijo smo primerjali izračunano vrednost koeficienta prenosa toplote med sosednjima vialama $K_{v,Int,nm}$ z eksperimentalno določenimi vrednostmi, vzetimi iz literature [5], pri čemer izračunana vrednost pade znotraj izmerjenega območja.

2.2 Sklopljen 0D-3D CFD model

Z namenom modeliranja interakcije med vialami in termalnim oljem, s katerim reguliramo temperaturo procesa, je 0D model sklopljen s 3D CFD modelom, kjer modela med seboj izmenjujejo podatke. Sklopitev je bila izvedena z uporabniško definiranimi funkcijami (UDF). Časovno odvisne vodilne enačbe stisljive tekočine, ki jih rešuje CFD model so naslednje. Enačba ohranitve mase se izrazi z:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (21)$$

kjer je $\mathbf{u}$ hitrost tekočine, pri čemer sta v našem primeru to olje v kanalih polic in zrak v sušilni komori. Ohranitev gibalne količine je opisana z:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F} \quad (22)$$

kjer je p tlak, $\boldsymbol{\tau}$ je napetostni tenzor in $\mathbf{F}$ so dodatne sile, ki vplivajo na tok tekočine. Nazadnje se rešuje še enačba ohranitve energije z naslednjo obliko:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\mathbf{u}(\rho E + p)) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) \quad (23)$$

kjer je E skupna energija. Za vse tekočine znotraj sistema je bil zaradi nizkih hitrosti predpostavljen laminarni tok. Za potrditev te predpostavke je bilo izračunano Reynoldsovo število za primer z najvišjim masnim pretokom olja, kjer pričakujemo najvišje vrednosti Re . Izračunana vrednost je znašala 565,8, kar potrjuje, da je tok olja tudi pri najvišjem obratovalnem pretoku laminaren.

Sklapljanje modelov je izvedeno prek gostote toplotnega toka, ki deluje na meji med vialo in polico liofilizatorja. Na koncu vsakega časovnega koraka CFD pošlje 0D modelu informacijo o temperaturi police tik pod vialo, 0D model pa CFD-ju vrne gostoto toplotnega toka, izračunano po spodnji enačbi:

$$q_{Bot} = -\frac{Q_{Bot}}{A_{Bot}} \quad (24)$$

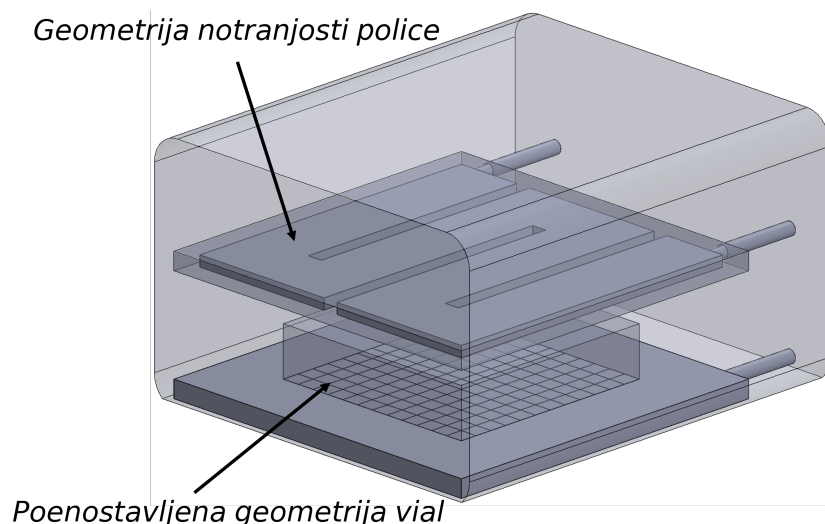
ki se predpiše kot robni pogoj na podani površini. Takšen dvostransko sklopljen model omogoča medsebojni vpliv temperature produkta in termičnega olja.

2.3 Geometrija in robni pogoji

Pri analizi vpliva procesnih parametrov je bila uporabljena geometrija komore laboratorijskega liofilizatorja z dvema policama, v katerih se preteka termično olje, prikazana na sliki 1. Na spodnji polici je postavljenih 144 vial, katerih območje je bilo odstranjeno iz geometrije in računske mreže, uporabljene pri simulacijah. Računsko območje je bilo zamreženo s 4,8 milijoni poliedrskih elementov. Simulacije so bile izvedene s komercialnim programskim paketom Ansys Fluent [2]. Na vstopu olja v polico smo predpisali konstantni masni pretok, na izstopu pa tlačni robni pogoj. Temperatura olja na vstopu je bila predpisana kot naslednji časovno odvisen pogoj:

- Začetno ohlajanje olja do temperature zadrževanja T_{Hold} .
- Zadrževanje temperature olja do nukleacije, ki je hkrati sprožena v vseh vialah.
- Zadrževanje temperature olja po nukleaciji.
- Ohlajanje olja do končne temperature T_{End} .
- Zadrževanje temperature olja na končni temperaturi do konca simulacije.

Na površinah, kjer se viala stikajo s polico (površina, označena s kvadrati na sliki 1), smo predpisali gostoto toplotnega toka, izračunano po enačbi 24. Na vseh ostalih stenah smo predpisali brezdrnsni robni pogoj, pri čemer smo na zunanjih stenah komore predpisali konstantno temperaturo z namenom upoštevanja termičnega sevanja, ki vpliva na temperaturo vial. Tako v primeru zraka znotraj komore kot olja v kanalih police smo upoštevali, da se materialne lastnosti spreminjajo s temperaturo.

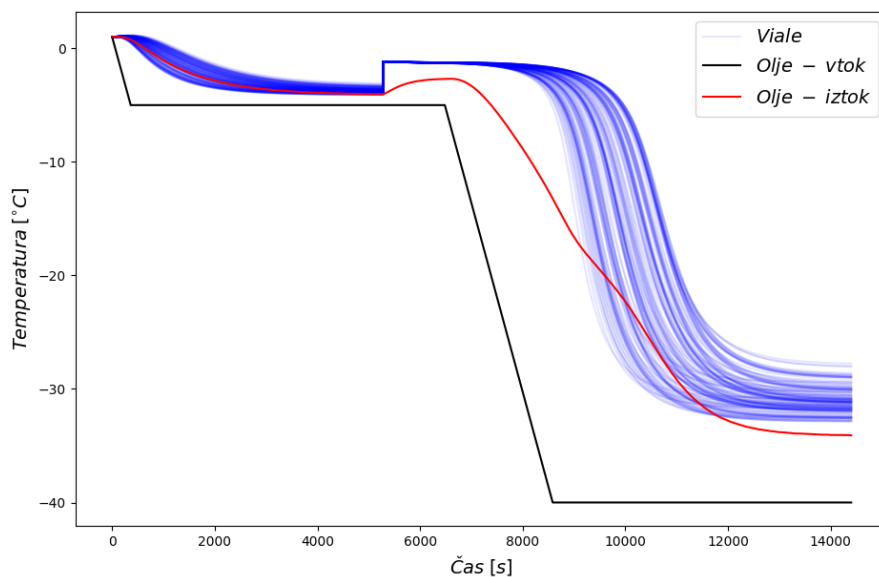


Slika 1: Geometrija sušilne komore laboratorijskega liofilizatorja s poenostavljenimi vialami na spodnji polici in s prikazom notranjosti police.

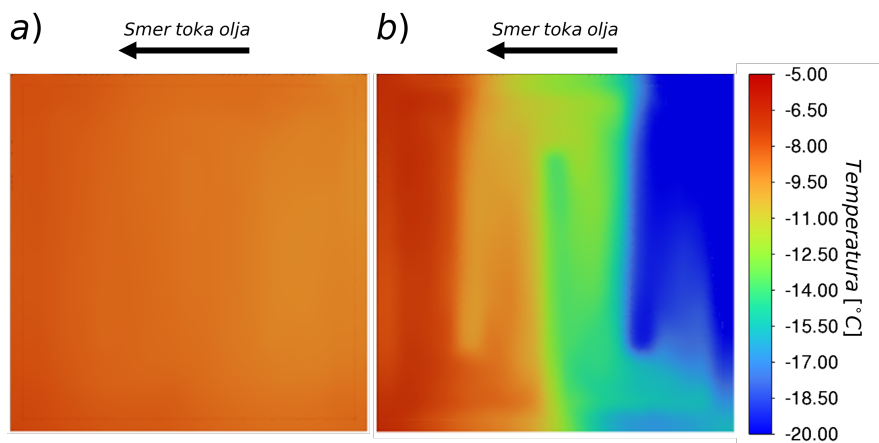
3 Rezultati in diskusija

Pri nastavljanju procesnih parametrov je cilj doseči čim bolj enakomerno zamrzovanje produktov v celotni seriji vial. Čeprav je nukleacija najpomembnejši dejavnik pri določanju velikosti ledenih kristalov, kinetika zamrzovanja še vedno pomembno vpliva na njihovo enakomerno porazdelitev po seriji. Ker velikost ledenih kristalov neposredno določa upor toka vodne pare skozi porozno pogačo produkta med primarnim sušenjem, neenakomerno zamrzovanje vodi do neenakomerne učinkovitosti sušenja v seriji, kar je z vidika optimizacije procesa nezaželeno. V ta namen smo analizirali, kako kontrolirana nukleacija, ki predstavlja spontano sprostitve visoke količine latentne toplote, vpliva na celoten sistem in posledično na enakomernost zamrzovanja. Temperaturni profili vial in olja na vstopu in izstopu, prikazani na sliki 2, kažejo, da kljub kontrolirani nukleaciji pride do neenakomernega zamrzovanja. Vzrok za to je termični odziv olja, ki teče v kanalih police: odvod toplote iz vial ter sprostitve latentne toplote med nukleacijo segreje olje med tokom skozi polico, zato se viala v smeri toka olja ohlajajo in zamrzujejo počasneje, čeprav je nukleacija nastopila hkrati v vseh vialah. Slika 3 prikazuje temperaturni profil na zgornji površini police pred nukleacijo in po njej v trenutku največje razlike temperature olja med vstopom in izstopom. Pred nukleacijo je porazdelitev temperature police enakomerna,

medtem ko po nukleaciji vpliv sproščene latentne toplote privede do izrazitega temperaturnega gradienta vzdolž smeri toka olja, kar neposredno povzroči neenakomerno zamrzovanje vial.



Slika 2: Časovni potek temperature produkta v vialah ter temperature olja na vstopu in izstopu police.

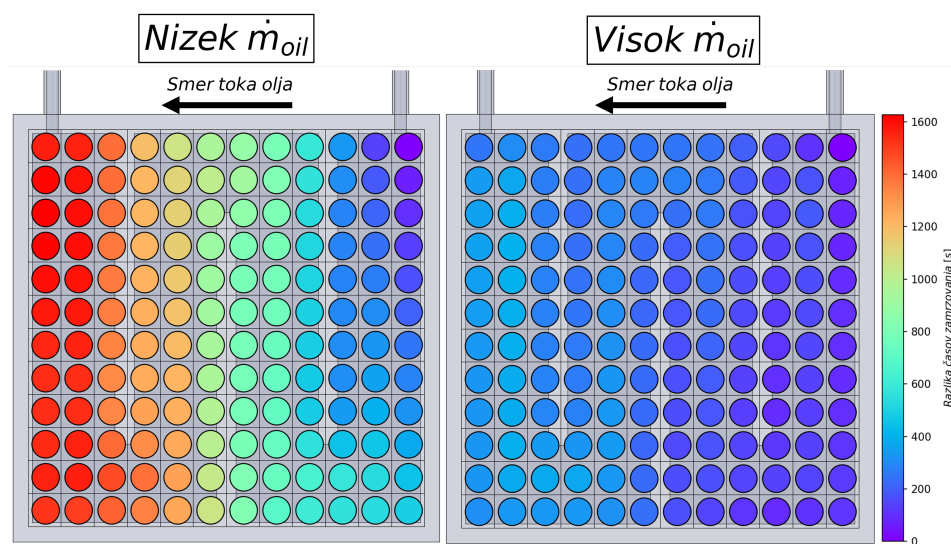


Slika 3: Porazdelitev temperature na zgornji površini police a) pred nukleacijo in b) po nukleaciji v trenutku največje razlike temperature olja med vstopom in izstopom.

Za analizo vpliva procesnih parametrov smo izbrali masni tok olja na vstopu v polico $\dot{m}_{oil}$, zadrževalno temperaturo T_{Hold} in hitrost ohlajanja olja na vstopu $\frac{dT_{oil}}{dt}$, pri čemer smo za vsak

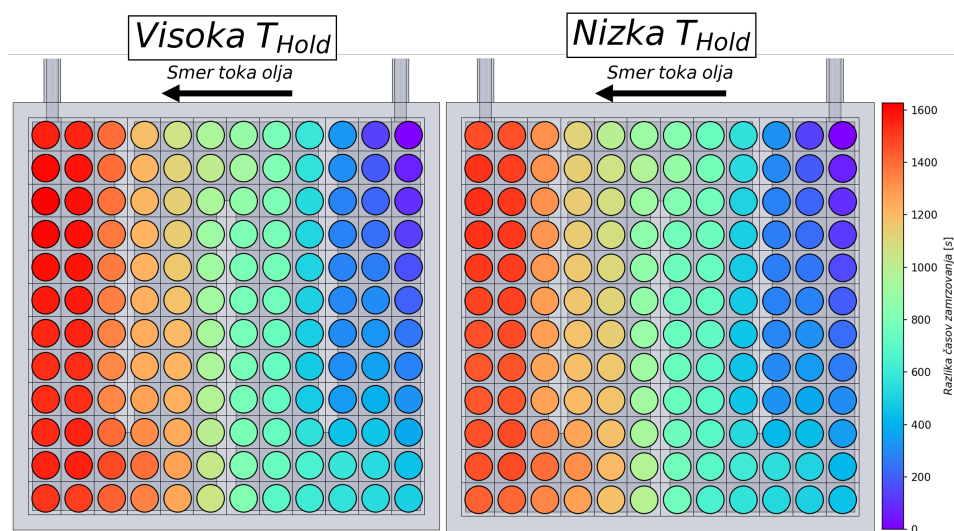
parameter izbrali tri referenčne vrednosti. Neenakomernost zamrzovanja je bila izražena kot razlika med najkrajšim in najdaljšim časom zamrzovanja vial, normalizirana s povprečnim časom zamrzovanja. Izkazalo se je, da povečanje masnega toka olja neenakomernost zmanjša za približno 10 % glede na referenčni primer, medtem ko zmanjšanje zadrževalne temperature in hitrosti ohlajanja zmanjša neenakomernost le za približno 1 %.

Prostorska porazdelitev časov zamrzovanja za mejni vrednosti masnega toka olja je prikazana na sliki 4. V primeru nizkega masnega toka je razviden izrazit prostorski gradient časov zamrzovanja vzdolž smeri toka olja, pri čemer viala na vstopni strani zamrzujejo bistveno hitreje od tistih na izhodni strani. Pri visokem masnem toku je ta gradient očitno manjši, kar potrjuje, da višji masni tok zmanjša temperaturni porast olja vzdolž police in s tem izboljša enakomernost zamrzovanja. Podobni prostorski vzorci so razvidni tudi na slikah 5 in 6, vendar z bistveno manjšim vplivom na skupno neenakomernost.

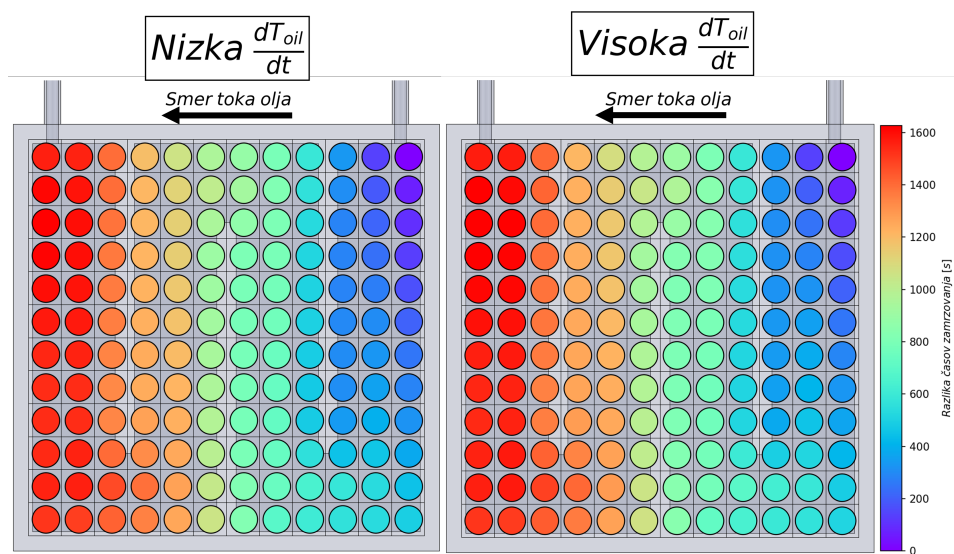


Slika 4: Časi zamrzovanja posameznih vial, normalizirani na čas zamrzovanja prve viala, za primer spreminjanja masnega toka olja.

Kljub temu ima vsak od procesnih parametrov praktične omejitve pri optimizaciji procesa. Povečanje masnega toka je najpogostejše omejeno s konstrukcijskimi lastnostmi liofilizatorja. Zmanjšanje hitrosti ohlajanja olja sicer izboljša enakomernost zamrzovanja, vendar neposredno podaljša skupni čas faze zamrzovanja, kar je z vidika učinkovitosti procesa nezaželeno. Ker je zadrževalna temperatura neposredno povezana s temperaturo nuklacije nižja zadrževalna temperatura sicer zmanjša neenakomernost, vendar hkrati povzroči nastanek manjših ledenih kristalov, kar poveča upor toka vodne pare med primarnim sušenjem. Te omejitve kažejo, da optimizacija zamrzovanja zahteva skrbno uravnoteženje procesnih parametrov in da sklopljen 0D-3D CFD model predstavlja učinkovito orodje za podporo pri tem procesu.



Slika 5: Časi zamrzovanja posameznih vial, normalizirani na čas zamrzovanja prve viale, za primer spreminjanja zadrževalne temperature.



Slika 6: Časi zamrzovanja posameznih vial, normalizirani na čas zamrzovanja prve viale, za primer spreminjanja hitrosti ohlajanja olja.

4 Zaključek

V tem delu je bil predstavljen sklopljen 0D-3D CFD model faze zamrzovanja v procesu liofilizacije. Model temelji na metodi koncentriranih parametrov za modeliranje zamrzovanja

posamezne vial, ki je sklopljen s 3D CFD modelom sušilne komore z dvema policama. Sklopitev je realizirana prek gostote toplotnega toka na meji med vialo in polico, pri čemer modela med seboj izmenjujeta podatke ob koncu vsakega časovnega koraka. Takšen pristop omogoča hkratno upoštevanje termičnega odziva olja v kanalih police in zamrzovanja produkta v vialah. Rezultati kažejo, da kontrolirana nukleacija kljub hkratnemu nastopu v vseh vialah ne zagotavlja enakomernega zamrzovanja po celotni seriji. Vzrok je termična interakcija med vialami in termalnim oljem, ki povzroči prostorski gradient časov zamrzovanja vzdolž smeri toka olja. Med analiziranimi procesnimi parametri se je masni tok olja izkazal kot najpomembnejši, saj njegovo povečanje zmanjša neenakomernost zamrzovanja za približno 10 %, medtem ko zadrževalna temperatura in hitrost ohlajanja olja vplivata le za približno 1 %. Vsak od parametrov ima pri tem praktične omejitve, ki preprečujejo poljubno optimizacijo, kar kaže, da sklopljen 0D-3D CFD model predstavlja učinkovito orodje za analizo in podporo pri načrtovanju procesnih parametrov liofilizacije.

5 Literatura

- [1] L.-T. Deck, D. R. Ochsenbein, and M. Mazzotti. Stochastic ice nucleation governs the freezing process of biopharmaceuticals in vials. *International Journal of Pharmaceutics*, 625:122051, 2022.
- [2] A. Inc. *Ansys ® Academic Research, Release 25.2, Help System, Theory Guide*. Ansys, Inc., 2025.
- [3] B. Kamenik, M. Hriberšek, and M. Zadravec. Simulation of ice deposition in a freeze-dryer condenser: A computational fluid dynamics study. *Applied Thermal Engineering*, 247:123019, 2024.
- [4] A. K. Konstantinidis, W. Kuu, L. Otten, S. L. Nail, and R. R. Sever. Controlled nucleation in freeze-drying: Effects on pore size in the dried product layer, mass transfer resistance, and primary drying rate. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 100(8):3453–3470, 2011.
- [5] V. Massotti, F. Artusio, A. A. Barresi, and R. Pisano. Mathematical modelling of thermal interactions during freezing: Effects on product morphology and drying behaviour. *European Journal of Pharmaceutical Sciences*, 210:107112, 2025.
- [6] M. Pikal, M. Roy, and S. Shah. Mass and heat transfer in vial freeze-drying of pharmaceuticals: Role of the vial. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 73(9):1224–1237, 1984.
- [7] M. Ramšak, M. Zadravec, J. Ravnik, J. Iljaž, M. Avanzo, K. Kočevar, Š. Irman, M. Cegnar, I. Golobic, A. Sitar, et al. Numerical and experimental modeling of lyophilization of lactose and mannitol water solutions in vials. *Computational Thermal Sciences: An International Journal*, 12(5), 2020.
- [8] B. Scutella, S. Passot, E. Bourlés, F. Fonseca, and I. C. Tréléa. How vial geometry variability influences heat transfer and product temperature during freeze-drying. *Journal of pharmaceutical sciences*, 106(3):770–778, 2017.

- [9] J. A. Searles, J. F. Carpenter, and T. W. Randolph. The ice nucleation temperature determines the primary drying rate of lyophilization for samples frozen on a temperature-controlled shelf. *Journal of Pharmaceutical Sciences*, 90(7):860–871, 2001.



Superellipsoidal Particle Dynamics in DNS-Based Wall-Bounded Turbulence

Jana Wedel^{1,2}, Nika Harl¹, Paul Steinmann^{2,3}, Matjaž Hriberšek¹, Jure Ravnik¹

Dinamika superelipsoidnih delcev v stensko omejeni turbulenci na osnovi DNS

Povzetek. Preučujemo dinamiko gibanja in orientacije superelipsoidnih mikrodelcev v stensko omejeni turbulenci na osnovi DNS, pri čemer uporabljamo bazo podatkov turbulence Univerze Johns Hopkins. Obravnavan je popolnoma razvit turbulenten kanalski tok pri $Re_\tau = 5200$, ki zagotavlja podatke o trenutni hitrosti in gradientu hitrosti. Za namen raziskav je bil razvit sklopljen Lagrangeov solver za sledenje delcev, ki iz baze podatkov pridobiva lokalno tokovno polje in izračunava translacijsko in rotacijsko dinamiko delcev. Obravnavani so superelipsoidni delci z velikostnimi razmerji $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 1$ ter parametri oblike $s_1 = s_2 \in 0.6, 1.0, 1.4$. Za vsako izbrano obliko se sledi 8×10^4 delcem, da se pridobijo statistično zanesljivi rezultati. Analiza se osredotoča na porazdelitev delcev v smeri, pravokotni na steno, statistiko hitrosti in preferenčno orientacijo delcev. Rezultati pokažejo, da oblika delcev pomembno vpliva na prostorsko porazdelitev in rotacijsko dinamiko, pri čemer razlike v ostrini površine vodijo do različnega obnašanja pri združevanju v skupke in preferenčni orientaciji. Ti izsledki kažejo, da je potrebno obliko delcev upoštevati pri modeliranju transporta nesferičnih mikrodelcev v turbulentnih kanalnih tokovih.

Abstract. We investigate the transport and orientation dynamics of superellipsoidal micro-particles in DNS-resolved wall-bounded turbulence using the Johns Hopkins Turbulence Database. The carrier flow is a fully developed turbulent channel flow at $Re_\tau = 5200$, providing instantaneous velocity and velocity-gradient information. A coupled Lagrangian particle-tracking solver is developed to query the local flow field from the database and compute the translational and rotational dynamics of the particles. Superellipsoidal particles with aspect parameters $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 1$, and shape parameters $s_1 = s_2 \in 0.6, 1.0, 1.4$ are considered. For each shape, 8×10^4 particles are tracked to obtain statistically reliable results. The analysis focuses on wall-normal particle distribution, angular velocity statistics, and preferred alignment. The results show that particle shape significantly affects spatial distribution and rotational dynamics, with differences in surface sharpness leading to distinct clustering and alignment behavior. These findings demonstrate that particle shape must be considered when modeling non-spherical micro-particle transport in turbulent channel flows.

¹ University of Maribor, Slovenia

² Friedrich-Alexander-University Erlangen-Nürnberg, Germany

³ Glasgow Computational Engineering Center, University of Glasgow, UK

1 Introduction

1.1 State-of-the-art

We are continuously exposed to particles in flows such as airborne aerosols, dust, droplets, fibres, pollutants, and micro-plastics. Understanding how particles are transported, how they rotate, how they align with local flow structures, and how they accumulate near boundaries is therefore important both for fundamental fluid mechanics and for practical applications. Turbulent flows with dispersed particles represent a particularly complex class of multiphase flows. The carrier phase is chaotic and multiscale, while the dispersed phase introduces additional translational and, for non-spherical particles, rotational degrees of freedom. Depending on particle size, concentration, and inertia, the interaction between the fluid and the particles can occur at different levels of coupling. In the dilute limit, one-way coupling is often assumed, meaning that the flow affects the particles, but the particles do not modify the flow. However, even in the one-way coupled regime, particle dynamics can be highly non-trivial because turbulent structures continuously modify particle velocity, orientation, and rotation. The theoretical basis for the motion of non-spherical particles originates from the classical work of Jeffery, who described the rotation of ellipsoidal particles in simple shear flow and showed that their orientation follows periodic orbits now known as Jeffery orbits [9]. Taylor later provided experimental confirmation of this theory for ellipsoidal particles in viscous flow [23]. Subsequent work showed that these orbits can be affected by geometric imperfections, Brownian motion, and inertia, which may lead to preferred orientations or orientational attractors [1, 7]. Brenner further showed that hydrodynamic drag and torque depend strongly on particle geometry and orientation, highlighting that particle shape is not a secondary effect but a central parameter in the dynamics of suspended particles [3]. In turbulent flows, the orientation and rotation of non-spherical particles are even more complex than in simple shear flow. Unlike spherical particles, which have no meaningful orientation, anisotropic particles are influenced not only by the local vorticity but also by the strain-rate tensor. Studies in homogeneous isotropic turbulence have shown that particle orientation is not random, but is statistically correlated with the local turbulent gradient field. Thin rods and fibres tend to align with the local vorticity, while discs exhibit different rotational behaviour and often rotate more rapidly than rod-like particles [20, 22]. These findings demonstrate that even in apparently random turbulence, coherent statistical structures determine the orientation and rotation of non-spherical particles. Wall-bounded turbulence introduces additional complexity because the presence of the wall produces strong anisotropy, mean shear, near-wall coherent structures, and gradients in turbulent kinetic energy. These effects lead to preferential concentration, turbophoresis, orientation anisotropy, and particle deposition near the wall [5, 13]. In turbulent channel flow, inertial particles are known to accumulate preferentially in near-wall low-speed streaks, while non-spherical particles show orientation dynamics that depend strongly on their shape and on the local shear. Ellipsoidal particles have been shown to preferentially align with the flow direction, especially near the wall, and to exhibit shape-dependent rotation and deposition behaviour [17, 18]. Other studies have shown that ellipsoidal particles may deposit more readily than spherical particles of the same volume because their rotation and orientation dynamics enhance wall-normal velocity fluctuations [27, 19]. Disc-shaped particles and fibres show different behaviour from ellipsoidal

or rod-like particles. Discs may preferentially orient such that their symmetry axis is directed in the spanwise or wall-normal direction, depending on the flow configuration, which changes their exposure to shear and modifies their rotational dynamics [4, 24, 26]. Fibres, on the other hand, often show strong preferential alignment with the flow direction and complex near-wall rotational behaviour. Their elongated geometry can increase wall deposition and may also influence local turbulent structures at higher concentrations [12, 14, 15].

Despite this progress, most existing studies have focused on relatively simple particle geometries such as spheres, spheroids, ellipsoids, rods, fibres, and discs. Many natural and engineered particles are neither perfectly spherical nor purely ellipsoidal, rod-like, or disc-like (volcanic ash, pollen particles among others). Their surface sharpness, blockiness, flatness, and multi-axis anisotropy can vary significantly. Therefore, there remains a lack of systematic knowledge about how more complex particle shapes behave in turbulent flows, particularly in wall-bounded turbulence where anisotropy and near-wall structures strongly influence particle dynamics.

1.2 Superellipsoidal particles

Superellipsoidal particles provide a useful framework for addressing this gap. For a given particle volume, a wide range of shapes can be generated using only four shape parameters: two aspect ratios, $\lambda_1 = a_1/a_3$ and $\lambda_2 = a_2/a_3$, and two shape exponents, s_1 and s_2 . Note that the three principle half-axes are denoted as $a_i, i = 1, 2, 3$ with $a_1 \geq a_2 \geq a_3$. The superellipsoid shape equation reads in the particle frame of reference (pFoR) $[x', y', z']$ as [2]

$$S(x', y', z') = \left[\left[|x'|/a_1 \right]^{2/s_2} + \left[|y'|/a_2 \right]^{2/s_2} \right]^{s_2/s_1} + \left[|z'|/a_3 \right]^{2/s_1} - 1 = 0, \quad (1)$$

The mass of these particle can be obtained using [8]

$$m_p = 2\rho_p a_1 a_2 a_3 s_1 s_2 B(s_1/2 + 1, s_1) B(s_2/2, s_2/2) \quad \text{with} \quad B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y), \quad (2)$$

where the particle density is denoted as ρ_p , [8]. Fig. 1 illustrates the wide range of shapes that can be represented using Eq. (1), even for a fixed semi-axis ratio.

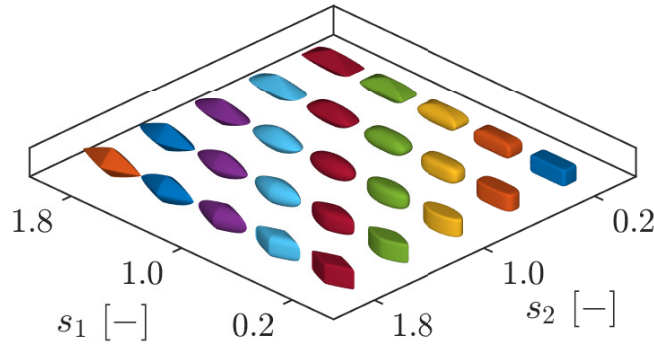


Figure 1: Set of superellipsoidal shapes for aspect ratios $\lambda_1 = 2.5$ and $\lambda_2 = 1$ and varying shape factors $s_1, s_2 = [0.2, 1.8]$.

1.3 Novelty and Contributions

This work studies the transport and rotational dynamics of superellipsoidal micro-particles in DNS-resolved wall-bounded turbulence. The carrier flow is taken from the Johns Hopkins Turbulence Database (JHTD) ([11, 21]) channel-flow dataset ([10]) at $\text{Re}_\tau = 5200$. By coupling a Lagrangian particle-tracking solver with the database, particle trajectories and orientations can be computed for a broad range of superellipsoidal shapes. The analysis focuses on the wall-normal particle distribution, angular velocity statistics, and preferred alignment. In this way, the study extends previous work on spherical, ellipsoidal, fibre-like, and disc-like particles toward a more general class of complex-shaped micro-particles and aims to clarify how particle geometry influences dynamics in wall-bounded turbulence.

2 Numerical methodology

To study dilute superellipsoidal particle suspensions in wall-bounded turbulence are investigated we use an Euler–Lagrange framework. The carrier phase uses an Eulerian frame and obtained from pre-calculated DNS data, whereas the dispersed phase uses a Lagrangian frame of reference. In the present work, one-way coupling is assumed.

2.1 DNS carrier flow

The carrier flow is an incompressible Newtonian fluid governed by the Navier–Stokes equations. The conservation of mass and momentum reads as

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{and} \quad \rho_f [\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] = -\nabla p + \mu_f \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3)$$

where $\mathbf{u}$ is the fluid velocity, p is the kinematic pressure, ρ_f is the density, and μ_f is the dynamic viscosity. The DNS data are taken from the fully developed turbulent channel flow at friction Reynolds number $\text{Re}_\tau = u_\tau h / \nu = 5200$ dataset of the JHTD. Here, u_τ is the friction velocity and h is the channel half-height. Details on the DNS can be found in [10].

2.2 Lagrangian particle tracking

The dispersed phase is described using an in-house Lagrangian particle-tracking solver coupled to the JHTD. The particle barycentric dynamics as used in the following expand as [16]

$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} V_p [\rho_p - \rho_f] + \pi \rho_f \nu_f a_3 \mathbf{K} \cdot [\mathbf{u} - \mathbf{v}] \quad \text{with} \quad V_p = d_{\text{eq}}^3 \pi / 6 \quad \text{and} \quad \underline{K} = \underline{R}^T \underline{K}' \underline{R}, \quad (4)$$

considering gravity and drag force, In Eq. (4) $\mathbf{v}$, m_p , V_p , ρ_p and d_{eq} denote the particle velocity, mass, volume, density, and volume equivalent spherical diameter, respectively. Furthermore, ρ_f labels the fluid velocity, fluid density, and kinematic viscosity. In addition, $\mathbf{K}$ is the translational resistance tensor. To relate $\underline{K}$ to $\underline{K}'$, the resistance tensor coefficient matrix in the particle frame of reference, the rotation matrix $\underline{R}$ is used. For superellipsoidal particles, we employ the results of Štrákl et al, [25], where a $\underline{K}'$ model was derived from DNS simulations. The rotational motion of an arbitrarily shaped particle moving in a fluid can be described in the pFoR as follows:

$$T'_1 = J'_{11} d\omega'_1/dt - \omega'_2 \omega'_3 [J'_{22} - J'_{33}], \quad (5)$$

$$T'_2 = J'_{22} d\omega'_{22}/dt - \omega'_3 \omega'_1 [J'_{33} - J'_{11}] , \quad (6)$$

$$T'_3 = J'_{33} d\omega'_3/dt - \omega'_1 \omega'_2 [J'_{11} - J'_{22}] , \quad (7)$$

where J'_{11} , J'_{22} , J'_{33} are the particle moments of inertia about the principal axes. Moreover, T'_i and ω'_i ($i = 1, 2, 3$) denote the hydrodynamic torques on the particle and the particle's angular velocities with respect to the principal axes. The expressions of J'_{ii} with $i = 1, 2, 3$ for a superellipsoidal particle using a prefactor $f = 0.5\rho_p a_1 a_2 a_3 s_1 s_2$ are: [8]

$$J_{x'} = f [a_2^2 B(1.5s_2, s_2/2) B(s_1/2, 2s_1 + 1) + 4a_3^2 B(s_2/2, s_2/2 + 1) B(1.5s_1, s_1 + 1)] , \quad (8)$$

$$J_{y'} = f [a_1^2 B(1.5s_2, s_2/2) B(s_1/2, 2s_1 + 1) + 4a_3^2 B(s_2/2, s_2/2 + 1) B(1.5s_1, s_1 + 1)] , \quad (9)$$

$$J_{z'} = f [a_1^2 + a_2^2] [B(1.5s_2, s_2/2) B(s_1/2, 2s_1 + 1)] . \quad (10)$$

Taking both rotational and shear flow contributions into account, the torque reads as: [25]

$$\underline{T} = \pi\mu a_3^3 \left[\underline{\Pi}' \cdot \begin{bmatrix} 0.5 [\partial u_{x'}/\partial y + \partial u_{y'}/\partial z] \\ 0.5 [\partial u_{x'}/\partial z + \partial u_{z'}/\partial x] \\ 0.5 [\partial u_{x'}/\partial y + \partial u_{y'}/\partial x] \end{bmatrix} + \underline{\Omega}' \cdot \begin{bmatrix} 0.5 [\partial u_{z'}/\partial y - \partial u_{y'}/\partial z] - \omega'_1 \\ 0.5 [\partial u_{x'}/\partial z - \partial u_{z'}/\partial x] - \omega'_2 \\ 0.5 [\partial u_{y'}/\partial x - \partial u_{x'}/\partial y] - \omega'_3 \end{bmatrix} \right] , \quad (11)$$

where $\underline{\Omega}'$ is the rotation resistance coefficient matrix and $\underline{\Pi}'$ the deformation resistance coefficient matrix in the pFoR. The tensor coefficients of $\underline{\Pi}'$ and $\underline{\Omega}'$ for superellipsoids are obtained from Štrákl et al., [25]. We parametrize the particle orientation using quaternions, which can be determined using the Euler angles $[\phi_1, \phi_2, \phi_3]$ as

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos[0.5[\phi_1 + \phi_3]] \cos[\phi_2/2] \\ \cos[0.5[\phi_1 - \phi_3]] \sin[\phi_2/2] \\ \sin[0.5[\phi_1 - \phi_3]] \sin[\phi_2/2] \\ \sin[0.5[\phi_1 + \phi_3]] \cos[\phi_2/2] \end{bmatrix} \quad (12)$$

and are subject to the constraint $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, [6]. The rotation matrix in the inertia frame follows as

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2[q_1 q_2 + q_0 q_3] & 2[q_1 q_3 - q_0 q_2] \\ 2[q_1 q_2 - q_0 q_3] & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2[q_2 q_3 - q_0 q_1] \\ 2[q_1 q_3 + q_0 q_2] & 2[q_2 q_3 - q_0 q_1] & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} . \quad (13)$$

In addition, the evolution of the quaternions $\underline{q}$ (Euler parameters) is related to the angular particle velocity in the particle frame $\underline{\omega}'$ as:

$$\begin{bmatrix} dq_0/dt \\ dq_1/dt \\ dq_2/dt \\ dq_3/dt \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \underline{\omega}' . \quad (14)$$

In this study, we consider $\lambda_1 = 2.5$, $\lambda_2 = 1$, and $s_1 = s_2 \in 0.6, 1.0, 1.4$. For all cases, the particle Stokes number is set to $\text{Stk} = 1$. The particle semi-minor axis a_3 is prescribed in viscous wall units using $a_3 = a_3^+ v_f / u_\tau$ with $a_3^+ = 0.36$. Initially, particles are randomly distributed and oriented in the channel. Their initial angular velocity is set to the local flow vorticity. For each particle shape, 8×10^4 particles to obtain statistically reliable results. During particle tracking, the instantaneous fluid velocity and velocity-gradient tensor are queried from the JHTDB at the current particle position and used to advance the translational and rotational particle dynamics.

3 Results and Discussion

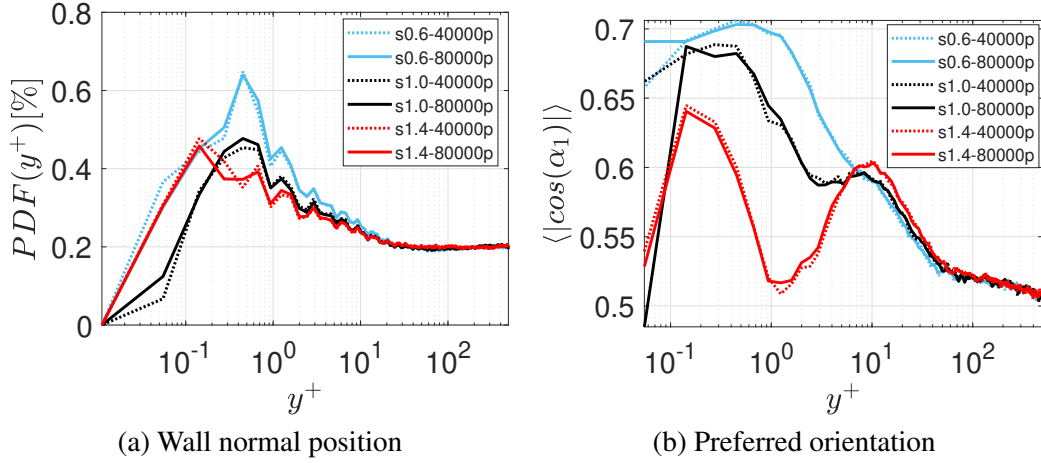


Figure 2: Wall-normal distribution and preferred orientation of cubical ($s := s_1 = s_2 = 0.6$), prolate ($s = 1.0$), and diamond-like ($s = 1.4$) particles in turbulent channel flow. Note that α defines the angle between the particle long axis and the streamwise direction.

Fig. 2(a,b) demonstrate that the number of tracked particles is sufficient to obtain statistically reliable trends. For all particle shapes considered, the difference between 4×10^4 and 8×10^4 particles is small. Increasing the particle number mainly smooths the distributions, while the general trends and peak locations remain essentially unchanged. Fig 2(a) shows that the wall-normal particle distribution depends strongly on particle shape. The preferred wall-normal position varies between the investigated geometries, with diamond-like particles peaking closer to the wall than prolate ellipsoidal particles. Cubical particles show the most pronounced clustering effect, indicating that their shape promotes stronger preferential concentration in the channel. Fig 2(b) presents the preferred particle alignment, characterized by the angle (α) between the particle long axis and the streamwise direction. The orientation statistics again show a clear shape dependence. Cubical particles exhibit one dominant preferred orientation followed by a steady decrease in probability with increasing y^+ . For prolate ellipsoidal particles, the preferred orientation occurs at a lower angle than for cubical particles, indicating stronger alignment with the streamwise direction. In contrast, diamond-like particles show two distinct preferred orientations, suggesting more complex orientational dynamics. With increasing distance from the wall, the orientation distribution tends toward a value of approximately 0.5, indicating that preferential alignment progressively weakens. Thus, closer to the channel center, no distinct preferred orientation remains for any of the investigated particle shapes.

4 Conclusions

This study demonstrates that superellipsoidal particle shape has a significant influence on micro-particle dynamics in DNS-resolved wall-bounded turbulence. By coupling a Lagrangian particle-tracking solver with the JHTDB channel-flow database at ($Re_\tau = 5200$), we obtained statisti-

cally reliable particle trajectories for selected superellipsoidal shapes. The results show clear shape-dependent differences in wall-normal distribution and preferred alignment. These findings highlight that particle shape must be considered when modeling and predicting the transport and rotational behavior of non-spherical micro-particles in turbulent channel flows

Acknowledgments

The authors thank the Deutsche Forschungsgemeinschaft for the financial support in the framework of the project STE 544/75 and the Slovenian Research and Innovation Agency (research core funding No. P2-0196 and project J7- 60118).

Literature

- [1] E. Anczurowski and S. G. Mason. Particle motions in sheared suspensions. XXIV. rotation of rigid spheroids and cylinders. *Trans. Soc. Rheol.*, 12:209–215, 1968.
- [2] A. H. Barr. Superquadrics and Angle-Preserving Transformations. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 1(1):11–23, 1981.
- [3] H. Brenner. The Stokes resistance of an arbitrary particle. *Chem. Eng. Sci.*, 18:1–25, 1963.
- [4] N. R. Challabotla, L. Zhao, and H. I. Andersson. Orientation and rotation of inertial disk particles in wall turbulence. *J. Fluid Mech.*, 766:R2, 2015.
- [5] J. R. Fessler, J. D. Kulick, and J. K. Eaton. Preferential concentration of heavy particles in a turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 6:3742–3749, 1994.
- [6] Goldstein, H. *Classical mechanics*. 2 edition, 1980.
- [7] E. J. Hinch and L. G. Leal. Rotation of small non-axisymmetric particles in a simple shear flow. *J. Fluid Mech.*, 92:591–608, 1979.
- [8] A. Jaklič and F. Solina. Moments of superellipsoids and their application to range image registration. *EEE Trans. Syst. Man Cybern. B Cybern.: a publication of the IEEE Systems, Man, and Cybernetics Society*, 33:648–57, 02 2003.
- [9] G. Jeffery. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A Math. Phys. Sci.*, 102(715):161–179, nov 1922.
- [10] M. Lee and R. D. Moser. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 5200$. *J. Fluid Mech.*, 774:395–415, 2015.
- [11] Y. Li, E. Perlman, M. Wan, Y. Yang, C. Meneveau, R. Burns, S. Chen, A. Szalay, and G. Eyink. A public turbulence database cluster and applications to study lagrangian evolution of velocity increments in turbulence. *Journal of Turbulence*, 9(31), 2008.
- [12] C. Marchioli, M. Fantoni, and A. Soldati. Orientation, distribution, and deposition of elongated, inertial fibres in turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 22:033301, 2010.

- [13] C. Marchioli and A. Soldati. Mechanism for particle transfer and segregation in turbulent boundary layers. *J. Fluid Mech.*, 468:283–315, 2002.
- [14] C. Marchioli and A. Soldati. Rotation statistics of fibres in wall shear turbulence. *Acta Mechanica*, 224:2311–2329, 2013.
- [15] C. Marchioli, L. Zhao, and H. I. Andersson. On the relative rotational motion between rigid fibres and fluid in turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 28:013301, 2016.
- [16] M. R. Maxey and J. J. Riley. Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow. *Phys. Fluids*, 26(4):883–889, 1983.
- [17] P. H. Mortensen, H. I. Andersson, J. J. J. Gillissen, and B. J. Boersma. Dynamics of prolate ellipsoidal particles in a turbulent channel flow. *Physics of Fluids*, 20:093302, 2008.
- [18] P. H. Mortensen, H. I. Andersson, J. J. J. Gillissen, and B. J. Boersma. On the orientation of ellipsoidal particles in a turbulent shear flow. *Int. J. Multiph. Flow.*, 34:678–683, 2008.
- [19] D. O. Njobuenwu and M. Fairweather. Dynamics of single, non-spherical ellipsoidal particles in a turbulent channel flow. *Chemical Engineering Science*, 123:265–282, 2015.
- [20] S. Parsa, E. Calzavarini, F. Toschi, and G. A. Voth. Rotation rate of rods in turbulent fluid flow. *Physical Review Letters*, 109:134501, 2012.
- [21] E. Perlman, R. Burns, Y. Li, and C. Meneveau. Data exploration of turbulence simulations using a database cluster. In *Proceedings of the 2007 ACM/IEEE Conference on Supercomputing*, SC '07. ACM/IEEE, 2007.
- [22] A. Pumir and M. Wilkinson. Orientation statistics of small particles in turbulence. *New Journal of Physics*, 13:093030, 2011.
- [23] G. I. Taylor. The motion of ellipsoidal particles in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society A*, 103:58–61, 1923.
- [24] G. A. Voth. Disks aligned in a turbulent channel. *J. Fluid Mech.*, 772:1–4, 2015.
- [25] M. Štrákl, M. Hriberšek, J. Wedel, P. Steinmann, and J. Ravnik. A Model for Translation and Rotation Resistance Tensors for Superellipsoidal Particles in Stokes Flow. *J. Mar. Sci. Eng.*, 10(3):369, 3 2022.
- [26] W. Yuan, H. I. Andersson, L. Zhao, N. R. Challabotla, and J. Deng. Dynamics of disk-like particles in turbulent vertical channel flow. *Int. J. Multiph. Flow.*, 96:86–100, 2017.
- [27] H. Zhang, G. Ahmadi, F. G. Fan, and J. B. McLaughlin. Ellipsoidal particles transport and deposition in turbulent channel flows. *Int. J. Multiph. Flow.*, 27:971–1009, 2001.



Viscoelastic Soft Particles in Simple Shear Flow

Jana Wedel¹², Paul Steinmann¹³, Matjaž Hriberšek², Jure Ravnik²

Viskoelastični mehki delci v enostavnem strižnem toku

Povzetek. V prispevku predstavimo razširitev našega modela deformabilnih delcev v večfaznih tokovih z razširitvijo na viskoelastične deformacije. Kinematiko delcev opišemo s prostorsko enakomernim deformacijskim gradientom in njegovim časovnim odvodom. Na osnovi kvazinestisljivega neo-Hookevega elastičnega napetostnega modela uvedemo Kelvin–Voigtov viskozni prispevek. Izpeljemo popolnoma implicitno formulacijo residuala ter analitično Newtonovo tangentno matriko, potrebno za izračun deformacije deformabilnih delcev. Dobljeni okvir predstavlja prvi korak k modeliranju hitrostno odvisne dinamike deformabilnih delcev ter ga uporabimo za preučevanje prehodnega in ustaljenega deformacijskega obnašanja viskoelastičnih, sprva sferičnih in elipsoidnih delcev v preprostem strižnem toku.

Abstract. We extend our affine pseudo-rigid particle model for efficient simulation of soft particles in flow to account for viscoelastic particle behaviour. Particle kinematics are represented by a spatially uniform deformation gradient and its time derivative. Building on a quasi-incompressible Neo-Hookean elastic stress, we introduce a Kelvin–Voigt viscous contribution. We derive the fully implicit residual formulation together with the analytical Newton tangent required to compute soft-particle deformation. The resulting framework represents an initial step toward modelling rate-dependent soft-particle dynamics and is applied to investigate the transient and long-time deformation of viscoelastic initially spherical and ellipsoidal particles in simple shear flow.

1 Introduction

Particles suspended in fluid flows occur in a wide range of natural and technological systems, including blood platelets, biological cells, bacteria, fibres, microplastics, pharmaceutical carriers, wastewater treatment processes, and cement or polymer suspensions [8]. To date, the dynamics of particle-laden flows have been investigated extensively for rigid spherical and non-spherical particles, both analytically [6], experimentally [7], and numerically [13]. However,

¹ Friedrich-Alexander-University Erlangen-Nürnberg, Germany

² University of Maribor, Slovenia

³ Glasgow Computational Engineering Center, University of Glasgow, UK

many particles of practical interest are not rigid. Examples include vesicles, capsules, hydrogels, biological cells, coated pharmaceutical particles, and other soft inclusions that deform under hydrodynamic tractions exerted by the surrounding fluid.

Early theoretical work on deformable particles focused mainly on small-deformation regimes and linearized constitutive assumptions. Fröhlich and Sack [2] studied Hookean elastic spheres in extensional Newtonian flows, while Cerf [1] and Goddard and Miller [5] considered viscoelastic or slightly deformable spheres in Stokes flow. Roscoe [9] later extended the description to initially spherical viscoelastic micro-particles undergoing finite deformations in viscous flows by combining affine particle kinematics with ideas from Jeffery’s rigid-ellipsoid theory [6]. In simple shear flow, this framework predicts the evolution towards ellipsoidal shapes, steady or time-dependent orientations, and tank-treading-type surface motion, which was numerically confirmed by Gao et al. [3, 4]. Nevertheless, many available approaches require explicit particle or surface discretization, which becomes expensive when large numbers of deformable particles are considered.

To overcome this limitation, we previously introduced an efficient pseudo-rigid-body description for soft particles [12, 11]. The model combines affine particle kinematics with a point-particle representation and finite-strain hyperelastic material behaviour. This makes the formulation attractive for simulations of large particle ensembles in general flow fields. While our initial formulation was presented for Neo-Hookean elastic particles, the framework is sufficiently general to accommodate other material laws, which will be demonstrated in this work. This is important as in many realistic soft-particle systems, the bulk material response is not purely elastic. Hydrogels, polymeric particles, biological cells, and coated pharmaceutical carriers may exhibit rate-dependent deformation, internal dissipation, and delayed shape relaxation. As a first step towards more general viscoelastic particle models, we therefore extend the affine pseudo-rigid soft-particle formulation to homogeneous Kelvin–Voigt (KV) material behaviour. In this model, the particle stress consists of an elastic Neo-Hookean contribution and an additional viscous contribution proportional to the deformation-rate tensor.

2 Affine pseudo-rigid kinematics

Let $\mathbf{x}_c(t)$ denote the particle centre and let $\mathbf{\Xi}$ denote a material position vector measured from the particle centre in the reference configuration, see Fig. 1. The current position of a material point is written as

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{\Xi}. \quad (1)$$

The second-order tensor $\mathbf{F}(t)$ is the affine deformation tensor of the pseudo-rigid particle. The local velocity is therefore

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_c(t) + \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{\Xi} \quad \text{with} \quad \mathbf{A}(t) := \dot{\mathbf{F}}(t). \quad (2)$$

The current particle volume is

$$\text{vol}(\mathcal{B}_t) = J \text{vol}(\mathcal{B}_0) \quad \text{with} \quad J = \det \mathbf{F}. \quad (3)$$

Here $\text{vol}(\mathcal{B}_0)$ denotes the particle volume in the reference configuration. For an initially ellipsoidal particle, we introduce an initial shape tensor $\mathbf{S}_0$ as detailed in [11]. It maps a reference

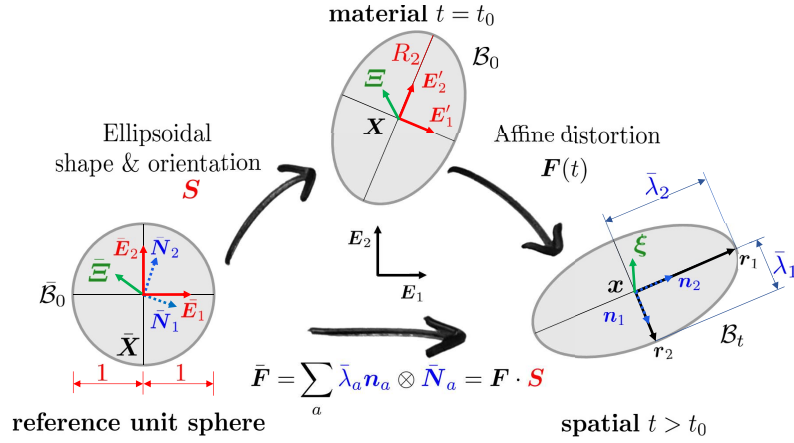


Figure 1: Initial ellipsoid (material configuration) with half axes R_a deforming affinely into an ellipsoid with half axes r_a , $a = 1, 2, 3$; Relative reference, material and spatial positions $\bar{\Xi}$, Ξ and ξ connecting the barycenter with the reference, material and spatial positions $\bar{X}$ in the reference configuration $\bar{\mathcal{B}}_0$, X in the material configuration $\mathcal{B}_0$ and x in the spatial configuration $\mathcal{B}_t$, respectively, of a pseudo-rigid body; Lagrangian principal directions $\bar{N}_a$ in the reference configuration $\bar{\mathcal{B}}_0$ and Eulerian principal directions $n_a = e'_a$ in the spatial configuration $\mathcal{B}_t$ with $a = 1, 2, 3$. Fixed inertial frame of reference E_a with $a = 1, 2, 3$.

unit sphere coordinate $\bar{\Xi}$ to a point in the reference particle,

$$\Xi = S_0 \cdot \bar{\Xi}. \quad (4)$$

The total current shape is then determined by $F(t) \cdot S_0$.

3 Inertial tensor of the homogeneous particle

The affine equation of motion is written as

$$\dot{A} \cdot \Theta + Q = 0 \quad (5)$$

with the material Euler tensor

$$\Theta = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \Xi \otimes \Xi dV \quad \text{with} \quad dV = \det(S_0) d\bar{V}, \quad (6)$$

where ρ_0 is the reference density. For a homogeneous particle, $\rho_0 = \rho^p$ is constant. For a homogeneous unit sphere, the angular integration gives

$$\int_{\mathcal{B}_0} \bar{\Xi} \otimes \bar{\Xi} d\bar{V} = \frac{4\pi}{15} I. \quad (7)$$

Hence, for a homogeneous ellipsoid with mass $m = \rho^p \text{vol}(\mathcal{B}_0)$,

$$\Theta = \frac{m}{5} S_0 \cdot S_0^t. \quad (8)$$

The common rigid-body moment of inertia tensor is related to Θ by

$$J = [\Theta : I] I - \Theta. \quad (9)$$

4 Homogeneous Neo-Hookean reference material

The quasi-incompressible Neo-Hookean first Piola stress is taken as

$$\mathbf{P}_{\text{el}} = \mu^s [\mathbf{F} - \mathbf{F}^{-t}] + \lambda \ln(J) \mathbf{F}^{-t}. \quad (10)$$

Here μ^s is the shear modulus and λ is the first Lamé parameter. The elastic capillary number Ca employed here is based on the imposed shear rate $\dot{\gamma}$ and the carrier-fluid viscosity μ^f ,

$$\text{Ca} = \mu^f \dot{\gamma} / \mu^s. \quad (11)$$

The full force dyad entering the pseudo-rigid equation contains the purely elastic internal force dyad $\mathbf{Q}_{\text{int}}$ and the hydrodynamic traction contribution (see [12, 11])

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{\text{el}} \text{vol}(\mathcal{B}_0) - [\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \text{vol}(\mathcal{B}_t)] \cdot \mathbf{F}^{-t} \quad \text{with} \quad \mathbf{Q}_{\text{int}} = \mathbf{P}_{\text{el}} \text{vol}(\mathcal{B}_0). \quad (12)$$

The tensor $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ is obtained from the hydrodynamic ellipsoid problem (see [12, 11]).

5 Homogeneous Kelvin–Voigt material

We now extend the homogeneous elastic material by adding a KV viscous contribution. The total first Piola stress is written as

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{el}} + \mathbf{P}_{\text{vis}} \quad \text{with} \quad \mathbf{P}_{\text{el}} = \mu [\mathbf{F} - \mathbf{F}^{-t}] + \lambda \ln(J) \mathbf{F}^{-t} \quad \text{and} \quad \mathbf{P}_{\text{vis}} = \eta_{\text{KV}} \mathbf{A}. \quad (13)$$

The parameter η_{KV} has the units of viscosity. The model therefore penalizes rapid changes of the deformation gradient. The corresponding internal force dyad is

$$\mathbf{Q}_{\text{int}} = [\mathbf{P}_{\text{el}} + \eta_{\text{KV}} \mathbf{A}] \text{vol}(\mathcal{B}_0). \quad (14)$$

The full force dyad is therefore

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{P}_{\text{el}} + \eta_{\text{KV}} \mathbf{A}] \text{vol}(\mathcal{B}_0) - [\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \text{vol}(\mathcal{B}_t)] \cdot \mathbf{F}^{-t}. \quad (15)$$

It is useful to introduce the material time scale $t_{\text{KV}} = \eta_{\text{KV}} / \mu^s$. The characteristic flow time in simple shear is $1/\dot{\gamma}$. We therefore define the dimensionless KV parameter

$$\tau_{\text{KV}} = t_{\text{KV}} \dot{\gamma} = \eta_{\text{KV}} \dot{\gamma} / \mu^s. \quad (16)$$

The limiting case $\tau_{\text{KV}} = 0$ recovers the purely elastic Neo-Hookean particle. Increasing τ_{KV} increases the resistance to rapid changes of the particle deformation. It should be noted that the present KV model introduces only a single characteristic viscoelastic time scale, while real soft particles may exhibit a broad spectrum of relaxation and retardation times. Thus, future work will therefore consider more general viscoelastic constitutive models.

6 Implicit time discretization

We use the implicit update

$$\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}_n + \Delta t \mathbf{A}_{n+1} \quad \text{and} \quad \dot{\mathbf{A}}_{n+1} \approx \Delta t^{-1} [\mathbf{A}_{n+1} - \mathbf{A}_n]. \quad (17)$$

Substitution into Eq. (5) and multiplication from the right by $\mathbf{\Theta}^{-1}$ and by Δt lead to the nonlinear residual

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}_{n+1}) = \mathbf{A}_{n+1} - \mathbf{A}_n + \Delta t \mathbf{Q}(\mathbf{F}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}) \cdot \mathbf{\Theta}^{-1} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

The unknown in the nonlinear problem is the tensor $\mathbf{A}_{n+1}$. Because $\mathbf{F}_{n+1}$ depends on $\mathbf{A}_{n+1}$ through Eq. (17), the residual is nonlinear through J , $\mathbf{F}^{-t}$, the elastic stress, and the traction terms. The KV contribution adds a direct linear dependence on $\mathbf{A}_{n+1}$.

7 Analytical Newton linearization

7.1 Vectorized residual

For the Newton method we vectorize the residual. We use the identity

$$\text{vec}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Theta}^{-1}) = [\mathbf{\Theta}^{-t} \otimes \mathbf{I}] \text{vec}(\mathbf{Q}). \quad (19)$$

Consequently, the Newton matrix has the form

$$\mathbf{J}_{\text{NR}} = \mathbf{I}_9 + \Delta t [\mathbf{\Theta}^{-t} \otimes \mathbf{I}] \mathbf{D}_A, \quad \text{with} \quad \mathbf{D}_A = \partial \text{vec}(\mathbf{Q}) / \partial \text{vec}(\mathbf{A}_{n+1}) \quad (20)$$

denoting the tangent of the force dyad with respect to the unknown deformation-rate tensor.

7.2 Tangent with respect to the deformation gradient

We first derive the tangent with respect to the deformation gradient,

$$\mathbf{D}_F = \partial \text{vec}(\mathbf{Q}_{\text{base}}) / \partial \text{vec}(\mathbf{F}) \quad \text{with} \quad \mathbf{Q}_{\text{base}} = \mathbf{P}_{\text{el}} \text{vol}(\mathcal{B}_0) - [\tilde{\boldsymbol{\sigma}} J \text{vol}(\mathcal{B}_0)] \cdot \mathbf{F}^{-t}, \quad (21)$$

where $\mathbf{Q}_{\text{base}}$ denotes all terms in Eq. (15) except the direct KV contribution, i.e. $\eta_{\text{KV}} \mathbf{A} \text{vol}(\mathcal{B}_0)$. The total tangent is decomposed into $\mathbf{D}_F = \mathbf{D}_{\text{el}} + \mathbf{D}_{\text{tr}}$. We use the standard variations

$$d\mathbf{F}^{-t} = -\mathbf{F}^{-t} \cdot (d\mathbf{F})^t \cdot \mathbf{F}^{-t}, \quad dJ = J \mathbf{F}^{-t} : d\mathbf{F}, \quad \text{and} \quad d \ln J = \mathbf{F}^{-t} : d\mathbf{F}. \quad (22)$$

Let $\mathbf{K}$ denote the 9×9 commutation matrix satisfying

$$\text{vec}((d\mathbf{F})^t) = \mathbf{K} \text{vec}(d\mathbf{F}). \quad (23)$$

From Eq. (22) we obtain

$$\text{vec}(d\mathbf{F}^{-t}) = -(\mathbf{F}^{-t} \otimes \mathbf{F}^{-t}) \mathbf{K} \text{vec}(d\mathbf{F}). \quad (24)$$

The elastic tangent becomes

$$\mathbf{D}_{\text{el}} = \text{vol}(\mathcal{B}_0) [\mu \mathbf{I}_9 + [\mu - \lambda \ln J] (\mathbf{F}^{-t} \otimes \mathbf{F}^{-t}) \mathbf{K} + \lambda \mathbf{v} \mathbf{v}^t] \quad \text{with} \quad \mathbf{v} = \text{vec}(\mathbf{F}^{-t}). \quad (25)$$

The hydrodynamic traction term is

$$\mathbf{Q}_{\text{tr}} = -[\tilde{\boldsymbol{\sigma}} J \text{vol}(\mathcal{B}_0)] \cdot \mathbf{F}^{-t}. \quad (26)$$

Its variation has two contributions: one from J and one from $\mathbf{F}^{-t}$. In vectorized form this yields

$$\mathbf{D}_{\text{tr}} = (\mathbf{I} \otimes \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) [\text{vol}(\mathcal{B}_0) J [(\mathbf{F}^{-t} \otimes \mathbf{F}^{-t}) \mathbf{K} - \mathbf{v} \mathbf{v}^t]]. \quad (27)$$

Equations (25)–(27) define the analytical tangent $\mathbf{D}_F$ used in the Newton iteration.

7.3 Construction of the Newton tangent

The Newton unknown is $\mathbf{A}_{n+1}$, not $\mathbf{F}_{n+1}$. Therefore the tangent with respect to $\mathbf{A}_{n+1}$ follows from the chain rule. From Eq. (17),

$$d\mathbf{F} = \Delta t d\mathbf{A}. \quad (28)$$

The terms collected in $\mathbf{D}_F$ therefore contribute $\Delta t \mathbf{D}_F$ to $\mathbf{D}_A$. In addition, the KV stress gives the direct variation

$$d[\eta_{\text{KV}} \mathbf{A} \text{vol}(\mathcal{B}_0)] = \eta_{\text{KV}} \text{vol}(\mathcal{B}_0) d\mathbf{A}. \quad (29)$$

Thus,

$$\mathbf{D}_A = \Delta t \mathbf{D}_F + \eta_{\text{KV}} \text{vol}(\mathcal{B}_0) \mathbf{I}_9. \quad (30)$$

Substitution into Eq. (20) gives the complete Newton matrix for the KV particle,

$$\mathbf{J}_{\text{NR}} = \mathbf{I}_9 + \Delta t [\boldsymbol{\Theta}^{-t} \otimes \mathbf{I}] [\Delta t \mathbf{D}_F + \eta_{\text{KV}} \text{vol}(\mathcal{B}_0) \mathbf{I}_9]. \quad (31)$$

For $\eta_{\text{KV}} = 0$, Eq. (31) reduces to the purely elastic tangent.

Remark 1: Expected deformation behaviour in simple shear The KV extension changes the transient deformation dynamics, but not the static equilibrium deformation. In a static long-time state, $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ and $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$, so the viscous stress vanishes and the equation of motion reduces to $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ with the same elastic stress as in the Neo-Hookean case. Thus, for identical parameters, KV and Neo-Hookean particles approach the same static steady deformation. Their approach to this state can nevertheless differ. This conclusion does not apply to time-dependent long-time states such as tumbling, trembling, or oscillatory deformation regimes. In such cases $\mathbf{A}(t) \neq \mathbf{0}$, so $\mathbf{P}_{\text{vis}}(t) = \eta_{\text{KV}} \mathbf{A}(t)$ remains active.

8 Demonstrative examples

8.1 Soft initially spherical particle in simple shear flow

The formulation will first be tested for initially spherical particles in simple shear flow. We will compare the purely elastic case $\tau_{\text{KV}} = 0$ with several KV cases $\tau_{\text{KV}} > 0$. As observed in Fig. 2, the steady-state particle deformation is independent of τ_{KV} , while the transient approach is delayed as τ_{KV} increases.

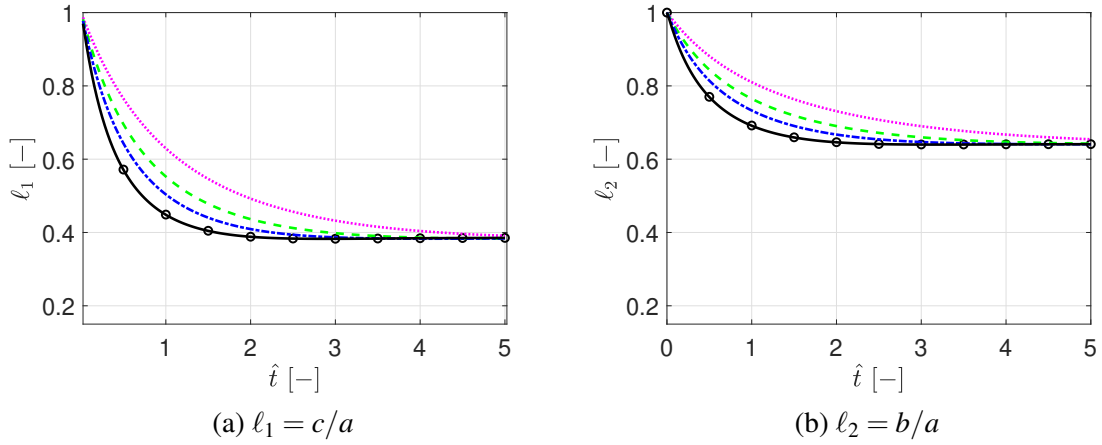


Figure 2: Initially spherical soft neo-Hookean particle ($Ca = 0.4$) suspended in simple shear flow. Aspect ratio parameters ℓ_φ , $\varphi = 1, 2$: $\circ$ Gao et al. [4], present model: $\blacksquare$ $\tau_{KV} = 0$, $\bullet$ $\tau_{KV} = 0.5$, $\color{red}\bullet$ $\tau_{KV} = 1$, $\color{blue}\bullet$ $\tau_{KV} = 2$.

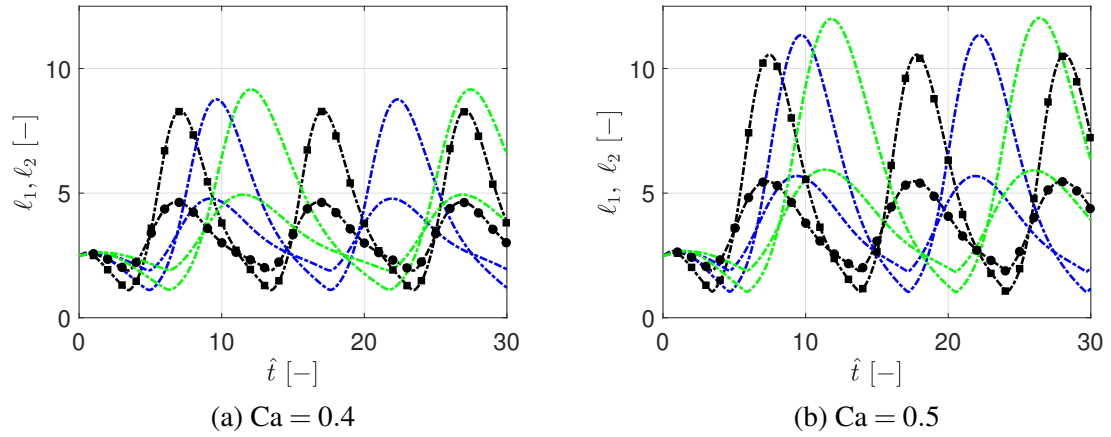


Figure 3: Initially oblate soft neo-Hookean particle suspended in simple shear flow. Initial aspect ratio of $\ell_1(0) = \ell_2(0) = 2.5$. Aspect ratio parameters ℓ_φ , $\varphi = 1, 2$: $\blacksquare/\bullet$ Sanagavarapu et al. [10], present model: $\blacksquare$ $\tau_{KV} = 0$, $\color{blue}\bullet$ $\tau_{KV} = 0.5$, $\color{red}\bullet$ $\tau_{KV} = 1$.

8.2 Soft initially oblate particle in simple shear flow

A second set of examples will consider initially oblate particles suspended in simple shear flow, see Fig. 3. As observed, the KV contribution modifies the shape dynamics of the soft particle even at long times, since $\mathbf{A}(t)$ does not vanish identically.

9 Conclusions

We derived a KV extension of the affine pseudo-rigid soft-particle model, allowing rate-dependent viscoelastic particle dynamics to be simulated efficiently. The extension adds the viscous Piola stress to the quasi-incompressible Neo-Hookean stress. The fully implicit residual was formulated and an analytical Newton tangent was derived. We show that the hydrodynamic traction does not require a change of model when the bulk material is extended from Neo-Hookean elasticity to KV viscoelasticity. We show that for static steady deformations, the KV contribution vanishes and the final shape coincides with the purely elastic reference solution. For transient and persistently time-dependent regimes, however, we show that the rate-dependent stress can significantly affect the particle deformation. Future work will aim at extending beyond the KV model towards more realistic soft particles that often exhibit a spectrum of relaxation times.

Acknowledgments

The authors thank the Deutsche Forschungsgemeinschaft for the financial support in the framework of the project STE 544/75 and the Slovenian Research and Innovation Agency (research core funding No. P2-0196 and project J7- 60118).

Literature

- [1] R. Cerf. On the frequency dependence of the viscosity of high polymer solutions. *J. Chem. Phys.*, 20(3):395 – 402, 1952.
- [2] H. Frohlich and R. Sack. Theory of the Rheological Properties of Dispersions. *Proceedings of the Royal Society of London*, 185:415 – 430, 1946.
- [3] T. Gao and H. H. Hu. Deformation of elastic particles in viscous shear flow. *J. Comput. Phys.*, 228(6):2132–2151, 2009.
- [4] T. Gao, H. H. Hu, and P. P. Castañeda. Rheology of a suspension of elastic particles in a viscous shear flow. *J. Fluid Mech.*, 687:209–237, 2011.
- [5] J. Goddard and C. Miller. Nonlinear effects in the rheology of dilute suspensions. *J. Fluid Mech.*, 28:657 – 673, 1967.
- [6] G. Jeffery. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proc. R. Soc. Lond. A Math. Phys. Sci.*, 102(715):161–179, nov 1922.
- [7] I. M. Krieger. Rheology of monodisperse latices. *Adv. Colloid Interface Sc.*, 3(2):111–136, 1972.
- [8] A. Podlozhnyuk, S. Pirker, and C. Kloss. Efficient implementation of superquadric particles in discrete element method within an open-source framework. *Comput. Part. Mech.*, 4, 2016.
- [9] R. Roscoe. On the rheology of a suspension of viscoelastic spheres in a viscous liquid. *J. Fluid Mech.*, 28(2):273–293, 1967.

- [10] P. K. Sanagavarapu, G. Subramanian, and P. R. Nott. Shape dynamics and rheology of dilute suspensions of elastic and viscoelastic particles. *J. Fluid Mech.*, 949:A22, 2022.
- [11] J. Wedel, M. Hriberšek, J. Ravnik, and P. Steinmann. Ellipsoidal soft micro-particles suspended in dilute viscous flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 441:117973, 2025.
- [12] J. Wedel, M. Hriberšek, J. Ravnik, and P. Steinmann. A novel pseudo-rigid body approach to the non-linear dynamics of soft micro-particles in dilute viscous flow. *J. Comput. Phys.*, 519:113377, 2024.
- [13] J. Wedel, P. Steinmann, M. Štrákl, M. Hriberšek, and J. Ravnik. Shape matters: Lagrangian tracking of complex nonspherical microparticles in superellipsoidal approximation. *Int. J. Multiph. Flow*, 158:104283, 2023.



Točne uklonske sile večetažnih ter večpoljnih jeklenih ravninskih okvirjev

Peter Kočman¹, Igor Planinc¹, Bojan Čas¹

Exact buckling loads of multi-story and multi-bay planar steel frames

Povzetek. Poznavanje uklonske nosilnosti večetažnih in večpoljnih jeklenih okvirjev je ključno pri zagotavljanju njihove varnosti. Zato vsi sodobni standardi, kot sta na primer Eurocode 3 in ANSI/AISC 360-05, posvečajo zagotavljanju tovrstne nosilnosti veliko pozornosti. Kljub obsežnim raziskavam na tem področju v strokovni literaturi še vedno ni mogoče zaslediti analitične formulacije za določitev točne inelastične bifurkacijske uklonske sile večetažnih in večpoljnih jeklenih ravninskih okvirjev. To praznino zapolni ta prispevek, v katerem predstavimo splošen analitični postopek, ki v enotnem okviru obravnava nezavarovane in zavarovane (bočno podprte) okvirje ter upošteva materialno nelinearnost jekla. Ključna novost prispevka je, da so enačbe obravnavanega modela prvič rešene analitično in točno. Predstavljeni postopek temelji na Simo-Reissnerjevem modelu ravninskih nosilcev in Kellerjevi ugotovitvi, da so bifurkacijske (kritične) točke nelinearnega sistema diferencialnih enačb enake bifurkacijskim točkam pripadajočega lineariziranega sistema. Učinkovitost analitičnega postopka analiziramo na jeklenem okvirju s šestimi etažami in tremi polji, za katerega v literaturi obstajajo numerične analize uklonske nosilnosti.

Abstract. The determination of the buckling resistance of multi-storey and multi-bay steel frames is essential for ensuring their structural safety. Consequently, modern design standards, such as Eurocode 3 and ANSI/AISC 360-05, devote considerable attention to this phenomenon. Despite extensive research in this field, no analytical formulation for the exact determination of the inelastic bifurcation buckling load of multi-storey and multi-bay planar steel frames has been reported in the literature. This paper fills this gap by presenting a general analytical formulation that provides a unified treatment of both sway and laterally restrained frames while accounting for material non-linearity of steel. The principal novelty of the proposed formulation is that, for the first time, the governing equations of this structural model are solved analytically and exactly. The formulation is based on the Simo–Reissner beam theory and Keller’s finding that the bifurcation points of a nonlinear system of differential equations coincide with those of the corresponding linearized system. The applicability of the proposed analytical formulation is demonstrated using a six-storey, three-bay steel frame for which numerical buckling results are available in the literature.

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Gradbeništvo in Geodezijo

1 Uvod

Pretežno tlačno obremenjene konstrukcije se lahko porušijo, pogosto pravimo, da konstrukcija doseže svojo nosilnost, na dva načina. Pri prvem načinu, pri katerem konstrukcijo sestavljajo kratki in čokati elementi, je porušitev povezana z doseženo trdnostjo materiala. V tem primeru govorimo o materialni porušitvi konstrukcije. Drugi način porušitve je povezan z vitkostjo konstrukcije. Porušitev vitkih konstrukcij je posledica stabilnostnih pojavov, najpogosteje uklona, zato v tem primeru govorimo o geometrijski porušitvi konstrukcije. Zelo vitke konstrukcije se lahko uklonijo že pri razmeroma majhnih obremenitvah, pri čemer se sestavni elementi konstrukcije še vedno obnašajo linearno elastično. Pri manj vitkih konstrukcijah, kot so to na primer bočno podprti okvirji, pa so obremenitve sestavnih elementov konstrukcije večje, zaradi česar uporaba linearno elastičnega modela materiala ni več ustrezna. Zanesljiva napoved uklonske nosilnosti tovrstnih konstrukcij zato zahteva v analizi dosledno upoštevanje materialne nelinearnosti, kar bistveno poveča zahtevnost analiz. Čeprav upoštevanje materialne nelinearnosti vodi do reševanja zahtevnega sistema navadnih diferencialnih enačb, v pričujočem prispevku pokažemo, da je mogoče določiti uklonske sile točno tudi v teh primerih. Tako v tem prispevku predstavimo nov analitični postopek za določitev točnih uklonskih sil materialno nelinearnih ravninskih okvirjev. Uklonsko analizo omejimo na materialne modele za jeklene okvirje. Kot vemo veljajo jekleni okvirji za vitke konstrukcije, za katere je poznavanje uklonske nosilnosti bistvena za zagotavljanje njihove varnosti.

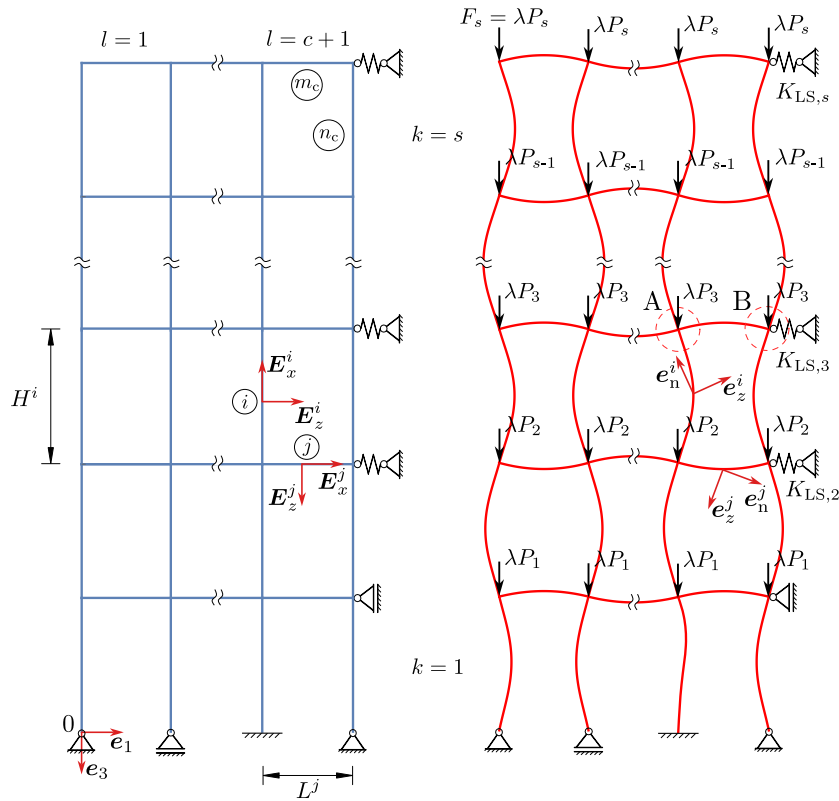
Analitični postopek za določitev točnih uklonskih sil jeklenih ravninskih okvirjev je zasnovan na Simo-Reissnerjevem [9] matematičnem modelu ravninskih nosilcev in ugotovitvah Kellerja [6]. Ta je dognal, da so bifurkacijske, kritične, točke nelinearnega sistema diferencialnih enačb enake bifurkacijskim, kritičnim, točkam pripadajočega lineariziranega sistema diferencialnih enačb. V predstavljenem analitičnem postopku jeklo modeliramo z Ramberg-Osgoodvim [8] nelinearnem materialnim modelom. Ta model je za določanje uklonske nosilnosti jeklenih konstrukcij predlagan tudi v standardu ANSI/AISC [1] in Eurocode 3 [2].

Prispevek ima poleg uvoda še štiri kratka poglavja. V drugem poglavju so predstavljene osnovne enačbe razvitega analitičnega postopka. Težišče prispevka predstavlja tretje poglavje, v katerem predstavimo nov analitični postopek za določitev točnih uklonskih sil jeklenih ravninskih okvirjev. V četrtem poglavju je s parametrično študijo prikazana učinkovitost predstavljenega analitičnega postopka. V zadnjem, poglavju pa podamo sklepne ugotovitve.

2 Osnovne enačbe

Opazujemo večetažni (število etaž je s), večpoljni (število polj je c) ravninski okvir pravilnih oblik s poljubnim številom stebrov n_c in prečk m_c . Okvir je v vozliščih obtežen le z navpičnimi točkovnimi silami, pri čemer so vrednosti teh v etaži enake. Obnašanje okvirja analiziramo v točkovnem Evklidskem postoru, kjer z $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ in $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ označimo bazne vektorje globalnega, inercialnega, koordinatnega sistema. Na sliki 1 so prikazane osnovne geometrijske karakteristike okvirja, možni načini podpiranja in lege točkovnih sil obravnavanega okvirja. Te v k -ti etaži označimo z $F_k = \lambda P_k$. Na sliki so prikazani tudi bazni vektorji materialnih, lokalnih, koordinatnih sistemov (x, y, z) stebrov in prečk v nedeformirani legi $\mathbf{E}_x^i, \mathbf{E}_y^i = \mathbf{e}_2, \mathbf{E}_z^i = \mathbf{E}_x^i \times \mathbf{e}_2$ in bazni vektorji v deformirani legi $\mathbf{e}_n^i, \mathbf{e}_y^i = \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_z^i = \mathbf{e}_n^i \times \mathbf{e}_2$ za $i = 1, 2, \dots, n_c + m_c$. Tu je tan-

gentni vektor lokalne koordinate x , $\mathbf{e}_x^i$, nadomeščen z $\mathbf{e}_n^i$, ki je pravokoten na deformiran prečni prerez stebrov in prečk okvirja. Na ta način pri deformiranju stebrov in prečk, skladno s Simo–Reissnerjevim modelom nosilcev, v analizi upoštevamo tudi strižno deformabilnost stebrov in prečk okvirja.



Slika 1: Geometrijske karakteristike, možni načini podpiranja in lege točkovnih sil okvirja v nedeformirani in deformirani legi.

Osnovne enačbe okvirja sestavljajo: kinematične, ravnotežne in konstitutivne enačbe stebrov ($i = 1, 2, \dots, n_c$) in prečk ($i = n_c + 1, n_c + 2, \dots, n_c + m_c$), ravnotežni in kinematični kompatibilnostni pogoji v vozliščih okvirja ter statični in kinematični robni pogoji. Te enačbe so v strokovni literaturi dobro znane, zato jih tu ne prikazujemo. Detajlno so na primer za elastične okvirje predstavljene v [7]. Za lažje razumevanje le teh prikazanih v [7] pojasnimo, da se kinematične enačbe za stebre in prečke razlikujejo zaradi njihove različne orientacije znotraj okvirja. Pomiki in zasuki so izraženi v globalnem koordinatnem sistemu, medtem ko so deformacijske količine, notranje sile in upogibni momenti opisani v lokalnih koordinatnih sistemih stebrov in prečk. Posledično imajo ravnotežne in konstitutivne enačbe stebrov in prečk enako obliko. Ker v tem prispevku predstavljamo analizo uklonske nosilnosti materialno nelinearnih okvirjev, v nadaljevanju na kratko predstavimo le konstitutivne enačbe stebrov in prečk okvirja, saj se le te razlikujejo od enačb predstavljenih v [7].

Pri nelinearnih materialnih modelih nosilcev praviloma predpostavimo le nelinearno materialno

deformabilnost v osni, normalni, smeri nosilca. Posledično je le normalna napetost v poljubnem materialnem vlaknu stebra ali prečke nelinearna funkcija pripadajočih osnih deformacij $\varepsilon^i = \varepsilon_x^i + z\kappa_y^i$ in $\sigma^i = \sigma^i(\varepsilon^i)$, kjer ε_x^i predstavlja osno deformacijo težiščne osi x stebra oziroma prečke, κ_y^i pa njeno pseudoukrivljenost. Značilni predstavnik takega nelinearnega modela je Ramberg-Osgoodov materialni model [8], ki se pogosto uporablja za analizo jeklenih okvirjev. Konstitutivne enačbe okvirja so:

za stebre ($i = 1, 2, \dots, n_c$):

$$N_x^i = N_{x,c}^i = \iint_{A_x^i} \sigma^i dA_x^i, \quad (1)$$

$$Q_z^i = Q_{z,c}^i = G^i A_s^i \gamma_z^i, \quad (2)$$

$$M_y^i = M_{y,c}^i = \iint_{A_x^i} z \sigma^i dA_x^i, \quad (3)$$

za prečke ($i = n_c + 1, n_c + 2, \dots, n_c + m_c$):

$$N_x^i = N_{x,c}^i = \iint_{A_x^i} \sigma^i dA_x^i, \quad (4)$$

$$Q_z^i = Q_{z,c}^i = G^i A_s^i \gamma_z^i, \quad (5)$$

$$M_y^i = M_{y,c}^i = \iint_{A_x^i} z \sigma^i dA_x^i. \quad (6)$$

V enačbah (1)–(6) predstavljajo N_x^i , Q_z^i in M_y^i ravnotežne količine, $N_{x,c}^i$, $Q_{z,c}^i$, $M_{y,c}^i$ pa konstitutivno osno in prečno silo ter konstitutivni upogibni moment v prečnem prerezu stebra oziroma prečke. A_x^i označuje prečni prerez, A_s^i strižni prerez, G^i strižni modul, γ_z^i pa strižno deformacijo stebra oziroma prečke okvirja.

3 Uklonske sile okvirjev

Uklonske sile okvirjev bomo določili s pomočjo dognanj Kellerja [6]. Ta je dokazal, da so kritične, bifurkacijske, točke nelinearnega sistema diferencialnih enačb enake kritičnim točkam pripadajočega linearne sistema diferencialnih enačb. Tako kritične točke nelinearnega sistema posplošenih ravnotežnih enačb okvirja, katerega osnovni parameter je obtežni faktor λ , določimo s pomočjo lineariziranega sistema posplošenih ravnotežnih enačb okvirja. Kritične vrednosti osnovnega parametra sistema enačb, pogosto imenujemo tudi uklonske sile okvirja, najmanjšo in pozitivno med njimi pa uklonska sila okvirja. Zaradi preglednosti smo poglavje razdelili na dve podpoglavji. V prvem predstavimo primarno ravnotežno lego okvirja in linearizacijo osnovnih enačb Simo–Reisnerjevega modela okvirja okoli te lege, v drugem pa reševanje linearne sistema posplošenih ravnotežnih enačb okvirja in s tem postopek za določitev uklonskih sil.

3.1 Primarna ravnotežna lega in linearizacija

Primarno ravnotežno lego okvirja določajo nedeformirane težiščne osi prečk ter osno deformirane, vendar še neizklonjene težiščne osi stebrov okvirja. Vrednosti mehanskih količin v primarni ravnotežni legi za stebre okvirja ($i = 1, 2, \dots, n_c$) so:

$$u_1^i(x^i) = 0, \quad (7)$$

$$u_3^i(x^i) = u_3^i(0) - \epsilon_x^i x^i, \quad (8)$$

$$\phi_2^i = 0, \quad (9)$$

$$N_x^i = \text{const.} < 0, \quad (10)$$

$$Q_z^i = 0, \quad (11)$$

$$M_y^i = 0, \quad (12)$$

$$N_x^i = N_{x,c}^i(\epsilon_x^i, \kappa_y^i = 0) \rightarrow \epsilon_x^i = \text{const.} < 0, \quad (13)$$

$$\gamma_z^i = 0, \quad (14)$$

$$\kappa_y^i = 0. \quad (15)$$

Ravnotežna osna sila stebrov N_x^i v k -tem nadstropju je enaka v vseh stebrih nadstropja in je enaka $-\sum_{i=k}^s F_i$. Ta je enaka konstitutivni osni sili v tem nadstropju $\mathcal{N}_c^k = -\sum_{i=k}^s F_i$.

Primarno ravnotežno lego i -te ($i = n_c + 1, n_c + 2, \dots, n_c + m_c$) prečke okvirja določajo naslednje vrednosti deformacijskih, ravnotežnih in kinematičnih količin:

$$\epsilon_x^i = \gamma_z^i = \kappa_y^i = N_x^i = Q_z^i = M_y^i = u_1^i = \phi_2^i = 0, \quad (16)$$

$$u_3^i = \text{const.} \neq 0. \quad (17)$$

Ko posplošene ravnotežne enačbe okvirja lineariziramo okoli primarne ravnotežne lege, dobimo sistem posplošenih ravnotežnih enačb stebrov in prečk v linearni obliki. Ker so tudi te enačbe detajlno predstavljene v [7], jih tu ne prikazujemo. Prikažemo le linearizirane konstitucijske enačbe, ki se seveda razlikujejo od lineariziranih konstitucijskih enačb predstavljenih v [7]. Te so:

za stebre ($i = 1, 2, \dots, n_c$)

$$\begin{aligned} \delta N_x^i &= \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon^i}(\epsilon_x^i \neq 0, \kappa_y^i = 0) A_x^i \delta \epsilon_x^i + \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon^i}(\epsilon_x^i \neq 0, \kappa_y^i = 0) S_y^i \delta \kappa_y^i = \\ &= C_{11}^i \delta \epsilon_x^i + C_{12}^i \delta \kappa_y^i = E_t^i A_x^i \delta \epsilon_x^i, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\delta Q_z^i = G^i A_s^i \delta \gamma_z^i, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta M_y^i &= \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon^i}(\epsilon_x^i \neq 0, \kappa_y^i = 0) S_y^i \delta \epsilon_x^i + \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon^i}(\epsilon_x^i \neq 0, \kappa_y^i = 0) I_y^i \delta \kappa_y^i = \\ &= C_{12}^i \delta \epsilon_x^i + C_{22}^i \delta \kappa_y^i = E_t^i I_y^i \kappa_y^i, \end{aligned} \quad (20)$$

za prečke ($i = n_c + 1, n_c + 2, \dots, n_c + m_c$)

$$\begin{aligned}\delta N_x^i &= \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon^i}(\epsilon_x^i = 0, \kappa_y^i = 0) A_x^i \delta \epsilon_x^i + \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon^i}(\epsilon_x^i = 0, \kappa_y^i = 0) S_y^i \delta \kappa_y^i = \\ &= C_{11}^i \delta \epsilon_x^i + C_{12}^i \delta \kappa_y^i = E^i A_x^i \delta \epsilon_x^i,\end{aligned}\quad (21)$$

$$\delta Q_z^i = G^i A_s^i \delta \gamma_z^i, \quad (22)$$

$$\begin{aligned}\delta M_y^i &= \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon^i}(\epsilon_x^i = 0, \kappa_y^i = 0) S_y^i \delta \epsilon_x^i + \frac{\partial \sigma^i}{\partial \epsilon^i}(\epsilon_x^i = 0, \kappa_y^i = 0) I_y^i \delta \kappa_y^i = \\ &= C_{12}^i \delta \epsilon_x^i + C_{22}^i \delta \kappa_y^i = E^i I_y^i \delta \kappa_y^i.\end{aligned}\quad (23)$$

3.2 Reševanje linearnega sistema diferencialnih enačb in določitev λ_{cr}

Linearizirane kinematične in ravnotežne (glej [7]) in konstitutivne enačbe (18)–(23) stebrov in prečk predstavljajo linearni sistem navadnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti. Metode reševanja tovrstnih sistemov enačb so dobro poznane. Ko posplošene linearizirane ravnotežne enačbe stebrov izrazimo s pomiki, dobimo za vsak steber ($i = 1, 2, \dots, n_c$) sistem linearnih diferencialnih enačb četrtega in drugega reda:

$$\delta u_1^{''''} + k^{i2} \delta u_1^{''} = 0, \quad (24)$$

$$\delta u_3^{''} = 0. \quad (25)$$

Rešitve tega sistema enačb so:

$$\delta u_1^i(x) = C_1^i + C_2^i x + C_3^i \sin(k^i x) + C_4^i \cos(k^i x), \quad (26)$$

$$\delta u_3^i(x) = C_5^i x + C_6^i. \quad (27)$$

Konstanta v enačbi (26) je določena z enačbama:

$$k^{i2} = -\frac{N_x^i a^i}{C_{22}^i} > 0, \quad (28)$$

$$a^i = 1 - N_x^i \left(\frac{1}{G^i A_s^i} - \frac{1}{C_{11}^i} \right) > 0. \quad (29)$$

Tudi posplošene linearizirane ravnotežne enačbe i -te prečke ($i = n_c + 1, n_c + 2, \dots, n_c + m_c$) izrazimo s pomiki in dobimo sistem naslednjih diferencialnih enačb:

$$\delta u_1^{i''} = 0, \quad (30)$$

$$\delta u_3^{i''''} = 0, \quad (31)$$

katerih rešitve so:

$$\delta u_1^i(x) = C_1^i x + C_2^i, \quad (32)$$

$$\delta u_3^i(x) = C_3^i x^3 + C_4^i x^2 + C_5^i x + C_6^i. \quad (33)$$

Preostale kinematične, deformacijske in statične količine stebrov in prečk okvirja določimo s pomočjo lineariziranih kinematičnih in ravnotežnih enačb [7]. Integracijske konstante v enačbah (26)–(27) in (31)–(33), ki smo jih označili z C_l^α ($l = 1, 2, \dots, 6; \alpha = 1, 2, \dots, n_c + m_c$), so poljubna realna števila. Z lineariziranimi kinematičnimi in ravnotežnimi robnimi ter kompatibilnostnimi pogoji v vozliščih okvirja dobimo sistem $6(n_c + m_c)$ linearnih enačb za določitev enakega števila neznanih konstant C_l^α ($l = 1, 2, \dots, 6; \alpha = 1, 2, \dots, n_c + m_c$). Te združimo v vektor $\mathbf{c}$. Za določitev $6(n_c + m_c)$ integracijskih konstant moramo rešiti homogeni sistem linearnih enačb:

$$\mathbf{K}\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (34)$$

O uklonu konstrukcij, tako tudi okvirjev, govorimo takrat ko ima sistem enačb več rešitev. Kot pa vemo, ima homogen sistem linearnih enačb več rešitev natanko tedaj, ko velja $\det(\mathbf{K}) = 0$.

Pojasnilo: V primarni deformirani legi okvirja velja, da so osne deformacije vseh stebrov v določenem nadstropju enake. V k -tem nadstropju jih označimo označimo z $\hat{\mathbf{e}}^k$. Enako velja tudi za ukrivljenosti stebrov k -tega nadstropja, ki jih označimo z $\hat{\mathbf{k}}^k$. Kritični uklonski faktor okvirja λ_{cr} določimo z rešitvijo naslednjega sistema nelinearnih algebrskih enačb:

$$g_k : \sum_{i=k}^s \lambda_{cr} P_i = -\mathcal{N}_c^k(\hat{\mathbf{e}}_{cr}^k, \hat{\mathbf{k}}_{cr}^k = 0) = -\mathcal{N}_c^k(\hat{\mathbf{e}}_{cr}^k), \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (35)$$

skupaj s pogojem

$$g_{s+1} : \det(\mathbf{K}(\lambda_{cr}, \hat{\mathbf{e}}_{cr}^1, \hat{\mathbf{e}}_{cr}^2, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{cr}^s)) = 0. \quad (36)$$

Rešiti moramo torej sistem $s + 1$ nelinearnih algebrskih enačb (g_k in g_{s+1}) z enakim številom neznank: λ_{cr} in $\hat{\mathbf{e}}_{cr}^k$ ($k = 1, 2, \dots, s$). Za reševanje tega sistema enačb je mogoče uporabiti npr. program *Wolfram Mathematica* [5], kjer ničle sistema nelinearnih enačb izračunamo z iteracijskimi postopki, metoda bisekcije ali Newton–Raphsonova metoda sta primerni izbiri. Rešitve sistema enačb (35) in (36) so iskani posplošeni kritični uklonski faktor okvirja λ_{cr} in pripadajoče kritične osne deformacije stebrov etaž $\hat{\mathbf{e}}_{cr}^k$ ($k = 1, 2, \dots, s$).

4 Računski primer

Predstavljeni analitični postopek za določitev točnih uklonskih sil jeklenih okvirjev prikažemo na šestetažnem jeklenem okvirju s tremi polji, ki sta ga analizirala Čorić in Brčić [4]. Okvir ima razpon polj $L = 10$ m in višino etaž $H = 5$ m. Stebri in prečke so izdelani iz zaprtih škatlastih prerezov, sestavljenih iz dveh standardnih U-profilov. Obravnavanih je šest različnih prečnih prerezov, ki so prikazani v preglednici 1. Skladno s [4] privzamemo $A_x^{prečka} = 0.5A_x^{steber}$ in $I_y^{prečka} = 0.5I_y^{steber}$. V analizi smo upoštevali tudi strižno deformabilnost stebrov in prečk s

strižnim koeficientom $k_s = 260/597$ ter nelinearni materialni model jekla skladno z Evrokodom 3 [3]. Pri tem smo privzeli elastični modul $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$, Poissonov količnik $\nu = 0.3$, mejo tečenja $f_y = 24 \text{ kN/cm}^2$ ter natezno trdnost $f_u = 36 \text{ kN/cm}^2$. Izračunane točne uklonske sile jeklenih okvirjev primerjamo z numeričnimi rešitvami Ćorića in Brčića [4]. Te sta avtorja izračunala z metodo končnih elementov.

Preglednica 1: Geometrijske karakteristike obravnavanega jeklenega okvirja in uporabljeni prečni prerezi stebrov ter prečk.

Geometrija okvirja		Prerezi stebrov in prečk		
Lastnost	Vrednost	Prerez	$A_x [\text{cm}^2]$	$I_y [\text{cm}^4]$
Število etaž	6	2 U8	22.0	243.45
Število polj	3	2 U12	34.0	603.54
Višina etaže	5 m	2 U16	48.0	1212.95
Razpon polja	10 m	2 U20	64.4	2237.02
Skupna višina okvirja	30 m	2 U26	96.6	4893.06
Skupna širina okvirja	30 m	2 U30	117.6	7256.90

V preglednici 2 so prikazane točne in numerične vrednosti kritičnih uklonskih faktorjev λ_{cr} za pomične in bočno podprte okvirje. Pri pomičnih okvirjih so odstopanja zanemarljiva, pri bočno podprtih okvirjih pa dosegajo približno 8 %. Rezultati nadalje kažejo, da se pomični okvirji z manjšimi prečnimi prerezi (do vključno 2U20) uklonijo v elastičnem območju. Pri večjih prečnih prerezi in pri bočno podprtih okvirjih pa le ti dosežejo svojo uklonsko nosilnost šele v primeru, ko je del okvirja v nelinearnem območju materialnega odziva. To potrjujejo tudi rezultati v preglednici 3, kjer so prikazane vrednosti kritičnega tangentnega modula jekla $E_{t,cr}$ v spodnjih treh etažah bočno podprtega okvirja. Pri manjših prečnih prerezi ostaja tangentni modul ob uklonu blizu elastičnega modula jekla, medtem ko se pri večjih prečnih prerezi, predvsem v prvi in drugi etaži, izrazito zmanjša. Pri okvirju s prerezom 2U30 znaša le ta v prvi etaži le približno 12 % elastičnega modula jekla, kar kaže na pomemben vpliv materialne nelinearnosti na uklonsko nosilnost jeklenih okvirjev.

Preglednica 2: Vrednosti kritičnih uklonskih faktorjev λ_{cr} [kN].

tip okvirja	λ_{cr} [kN]					
	prečni prerez stebra					
	2U8	2U12	2U16	2U20	2U26	2U30
	Analitično ^a ($C_{11} = A_x d\sigma/d\varepsilon$, $C_{22} = I_y d\sigma/d\varepsilon$)					
pomičen	10,483	25,970	52,151	96,084	209,535	306,434
bočno podprt	57,833	107,036	160,129	222,536	346,276	429,015
	Numerično*					
pomičen	–	26,010	52,280	96,410	209,390	307,580
bočno podprt	–	113,670	176,350	243,190	372,070	457,510

^a nelinearni materialni model skladno s CEN (Ramberg–Osgood) z upoštevanjem strižnih deformacij.

* S. Ćorić in S. Brčić, *Nonlinear stability analysis of the frame structures* [4].

Preglednica 3: Primerjava vrednosti kritičnih tangentnih modulov jekla $E_{t,cr}$ [kN/cm²] (bočno podprt okvir).

nadstropje	prečni prerez stebra					
	2U8	2U12	2U16	2U20	2U26	2U30
	$E_{t,cr}^a$ [kN/cm ²] ($C_{11} = A_x d\sigma/d\varepsilon$, $C_{22} = I_y d\sigma/d\varepsilon$)					
3	20988,73	20883,14	20753,26	20612,71	20383,04	20230,76
2	20796,83	19059,98	17265,94	15651,04	13543,31	12414,02
1	19012,73	10052,52	6336,91	4509,68	3047,52	2499,99
	$E_{t,cr}^*$ [kN/cm ²]					
3	21000,00	20725,26	19940,13	19593,97	19307,55	19204,57
2	20823,37	17757,00	15082,85	14094,42	13316,99	13044,42
1	18981,22	11528,89	6288,64	4435,65	2999,47	2499,75

^a nelinearni materialni model skladno s CEN (Ramberg–Osgood) z upoštevanjem strižne deformabilnosti.

* S. Ćorić in S. Brčić, *Nonlinear stability analysis of the frame structures* [4].

5 Zaključek

V prispevku smo predstavili nov analitični postopek za določitev točnih uklonskih sil večetažnih in večpoljnih materialno nelinearnih ravninskih jeklenih okvirjev. Predstavljeni postopek smo razvili za okvirje, pri katerih stebre in prečke modeliramo s Simo-Reissnerjevim modelom ravninskih nosilcev. Sam postopek je zasnovan na ugotovitvah Kellerja. Ta je pokazal, da so bifurkacijske točke nelinearnega sistema diferencialnih enačb enake bifurkacijskim točkam pripadajočega lineariziranega sistema diferencialnih enačb. Učinkovitost razvitega postopka smo preverili na primeru jeklenega okvirja s šestimi etažami in tremi polji ter rezultate primerjali z numeričnimi rezultati, ki sta jih objavila Čorić in Brčić. Primerjava je pokazala dobro ujemanje rezultatov. Detajlna parametrična analiza pa je pokazala, da na uklonsko nosilnost okvirja poleg geometrijskih značilnosti, kot so dimenzije stebrov in prečk ter lege in oblike podpor okvirja, pomembno vpliva tudi materialno nelinearno obnašanje jekla. Ta vpliv je najizrazitejši pri bočno podprtih okvirjih. To pa pomeni, da moramo pri projektiranju uklonske nosilnosti jeklenih okvirjev upoštevati tudi materialno nelinearno obnašanje jekla.

Zahvala. Delo P. Kočmana, I. Planinca in B. Časa financira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije (ARIS) na osnovi pogodbe 261805-241/2021 in v okviru raziskovalnega programa P2-0620. Za podporo se zahvaljujemo.

Literatura

- [1] ANSI/AISC 360-05: Specification for structural steel buildings. Technical report, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL, USA, 2005.
- [2] Eurocode 3: Design of steel structures – part 1-1: General rules and rules for buildings (en 1993-1-1). 2005.
- [3] CEN/TC 250. Eurocode 3: Design of steel structures. (CEN/TC 250/SC 3 N 4022), 2026.
- [4] S. Čorić and S. Brčić. Nonlinear stability analysis of the frame structures. *Building Materials and Structures*, 59(3):27–44, 2016.
- [5] W. R. Inc. Mathematica, Version 14.0. Champaign, IL, 2024.
- [6] H. B. Keller. Nonlinear bifurcation. *Journal of Differential Equations*, 7(3):417–434, 1970.
- [7] P. Kočman, I. Planinc, and B. Čas. An analytical framework for in-plane buckling of elastic frames with rigid and semi-rigid joints considering axial and shear deformations. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, page 2750295, 2026.
- [8] W. Ramberg and W. R. Osgood. Description of stress-strain curves by three parameters. Technical Report Technical Note No. 902, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Washington, DC, 1943.
- [9] J. C. Simo. A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49(1):55–70, 1985.



Razvoj simulacijskega okolja TimoLab za analizo odzivnih spektrov okvirnih konstrukcij

Tim Hrovat¹, Janez Urevc¹, Miroslav Halilović¹

Development of the TimoLab Simulation Environment for Response Spectrum Analysis of Frame Structures

Povzetek. V prispevku je predstavljeno simulacijsko okolje TimoLab, razvito v programskem jeziku Python, ki temelji na metodi eno-dimenzijskih končnih elementov in omogoča izvedbo analize odzivnih spektrov prostorskih okvirnih konstrukcij. Okolje trenutno v začetni fazi podpira Euler-Bernoullijevo in Timošenkovo teorijo upogiba ter implementira več pravil statističnega seštevanja modalnih prispevkov. Pravilnost implementacije je preverjena z analitičnimi referenčnimi primeri in primerjavo z rezultati komercialnega programa ANSYS, pri čemer relativne napake rezultatov ne presegajo 3,1%.

Abstract. This paper presents the TimoLab simulation environment, developed in the Python programming language, based on the one-dimensional finite element method, which enables response spectrum analysis of three-dimensional frame structures. The environment currently supports Euler-Bernoulli and Timoshenko beam theories and implements several modal combination rules. The correctness of the implementation is verified through analytical benchmark examples and comparison with ANSYS results, with relative errors remaining within the value of 3.1%.

1 Uvod

Analiza odzivnih spektrov (angl. *response spectrum analysis*, okrajšano RSA) je uveljavljena metoda za ocenjevanje maksimalnega dinamičnega odziva konstrukcij na tranzientna vzburjanja, kot so potresni valovi ali udarne motnje [1]. Ključna lastnost takšnih vzburjanj je, da natančna časovna zgodovina obremenitve pogosto ni poznana vnaprej. V primeru potresa pri projektiranju objekta ne moremo natančno predvideti niti amplitude niti frekvenčne vsebine vzburjanja. Analiza odzivnih spektrov ta izziv rešuje elegantno: namesto reševanja sistema diferencialnih enačb po časovnih korakih zadošča reševanje problema lastnih vrednosti in odčitavanje vrednosti iz vnaprej definirane odzivnega spektra, ki opisuje maksimalni odziv idealiziranega enostavnega oscilatorja v odvisnosti od njegove lastne frekvence. RSA tako

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

ponuja dober kompromis med natančnostjo in računsko učinkovitostjo ter je zato standardna metoda v gradbeništvu (Eurocode 8 [2]), strojništvu in jedrski industriji (ASCE 4-98 [3]).

V inženirski praksi se RSA praviloma izvaja v komercialnih simulacijskih okoljih, kot sta ANSYS ali Abaqus, katerih uporaba je pogojena s pridobitvijo komercialne licence. Za razvoj namenskih numeričnih modelov in lastnih analitičnih formulacij pa so takšna celovita komercialna okolja pogosto prekomerna, saj nudijo bistveno več funkcionalnosti, kot je za specifičen problem potrebno, hkrati pa zaprta izvorna koda onemogoča neposreden vpogled v implementacijo in razširitev z lastnimi modeli. V ta namen je bilo razvito simulacijsko okolje TimoLab, ki predstavlja odprtokodno Python implementacijo analize odzivnih spektrov za prostorske okvirne konstrukcije na osnovi metode eno-dimenzijskih končnih elementov. Prispevek predstavlja ključne lastnosti razvitega okolja in sistematično validacijo njegovih rezultatov. V drugem poglavju so na kratko opisane teoretične osnove. V tretjem poglavju je predstavljena arhitektura okolja TimoLab in metodologija validacije. Četrto poglavje prikazuje validacijo z referenčnim primerom analize odzivnih spektrov, ki je bil zasnovan v komercialnem okolju ANSYS, zaključki pa so zbrani v petem poglavju.

2 Teoretične osnove

Analiza odzivnih spektrov se izvaja na sistemih z več prostostnimi stopnjami (MDOF), katerih gibalne enačbe tvorijo sistem vezanih diferencialnih enačb drugega reda. Neposredna časovna integracija tega sistema je za inženirske konstrukcije računsko zahtevna; pri seizmičnih in udarnih analizah pa pogosto zadostuje poznavanje zgolj maksimalnega odziva, pri čemer izvemo najneugodnejši položaj dane konstrukcije s stališča trdnosti in nas ne zanima celotni časovni potek. S pomočjo predhodne modalne analize modalna transformacija vezan sistem enačb razklopi v nevezan sistem N neodvisnih modalnih enačb, pri katerih nas zanima zgolj maksimalna vrednost (torej maksimalni odziv) vsake modalne koordinate, odčitana neposredno iz odzivnega spektra in s statističnimi pravili kombiniranja združena v skupni odziv konstrukcije. Za sestavo masne in togostne matrike sistema, ki je predpogoj za izvedbo modalne analize, se v inženirski praksi običajno uporablja metoda končnih elementov.

2.1 Modalna analiza

Gibalne enačbe sistema z n prostostnimi stopnjami zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

kjer so $\mathbf{M}$ masna matrika, $\mathbf{C}$ dušilna matrika, $\mathbf{K}$ togostna matrika, $\mathbf{u}(t)$ vektor pomikov prostostnih stopenj in $\mathbf{F}(t)$ vektor vzbujevalnih sil. Enačba (1) v splošnem predstavlja vezan sistem enačb, kjer pomik posamezne prostostne stopnje vpliva na odziv preostalih. Lastne frekvence ω_{0_i} in lastne oblike $\boldsymbol{\phi}_i$ dobimo z reševanjem generaliziranega problema lastnih vrednosti:

$$(\mathbf{K} - \omega_{0_i}^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

Lastne oblike tvorijo modalno matriko $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \dots, \boldsymbol{\phi}_n]$, ki definira novo bazo v prostoru pomikov. Z modalno transformacijo $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}(t)$ in Rayleighevim modelom proporcionalnega dušenja ($\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$) se vezani sistem v enačbi (1) razčleni na n neodvisnih enačb v modalnem prostoru:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i\omega_{0_i}\dot{\eta}_i(t) + \omega_{0_i}^2\eta_i(t) = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

kjer so η_i modalne koordinate, ζ_i razmerniki dušenja in $Q_i = \tilde{\phi}_i^T \mathbf{F}$ modalne sile ($\tilde{\phi}_i$ predstavlja masno normirano i -to lastno obliko).

Ko poznamo modalne koordinate, lahko z modalno superpozicijo seštejemo odzive posameznih lastnih oblik, da izračunamo dejanski odziv konstrukcije:

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n \phi_i \eta_i(t) \quad (4)$$

2.2 Analiza odzivnih spektrov

Pri klasični modalni superpoziciji je za popoln opis odziva poleg lastnih frekvenc in lastnih oblik potrebno poznati časovni potek modalnih koordinat. Ključna značilnost analize odzivnih spektrov je, da je modalna enačba (3) formalno enaka gibalni enačbi enostavnega oscilatorja z eno prostostno stopnjo; njen maksimum je zato občutljiv neposredno iz odzivnega spektra. Odzivni spekter je alternativni popis vzbujanja podlage, pri čemer vsaka vrednost spektra predstavlja maksimalni odziv enostavnega oscilatorja z lastno frekvenco ω , podvrženega danemu vzbujanju. Ta odziv je običajno podan v enotah pospeška.

Z uvedbo modalnega participativnega faktorja $\Gamma_{k,i}$, ki opisuje v kolikšni meri i -ta lastna oblika sodeluje pri odzivu na vzbujanje v dani smeri $k \in \{x, y, z\}$, se maksimalna vrednost vsake modalne koordinate odčita neposredno iz spektra relativnih pomikov S_d oz. spektra pospeškov S_a kot:

$$\eta_{k,i,\max} = \Gamma_{k,i} \cdot S_d(\omega_{0_i}) = \Gamma_{k,i} \cdot \frac{S_a(\omega_{0_i})}{\omega_{0_i}^2} \quad (5)$$

Z določitvijo maksimalnih vrednosti modalnih koordinat iz odzivnega spektra se izognemo reševanju sistema diferencialnih enačb v časovni domeni. Pri tem se izgubi informacija o faznem razmerju med posameznimi modalnimi odzivi, zato maksimumov modalnih prispevkov ni mogoče algebrajsko sešteti. Takšen pristop bi predpostavljal, da vsi modalni maksimumi nastopijo istočasno, kar vodi do mnogo pretiranega odziva. Zato se pri analizi odzivnih spektrov uporabljajo statistična pravila kombiniranja modalnih odzivov. Običajno je uporabljeno pravilo popolne kvadratne kombinacije (angl. *complete quadratic combination*, okrajšano CQC) [1]:

$$R_p = \sqrt{\sum_i \sum_j \rho_{ij} R_{p,i} R_{p,j}} \quad (6)$$

pri čemer R_p predstavlja skupno poljubno odzivno količino in $R_{p,i}$ prispevek i -te modalne oblike. Koeficient koreliranosti ρ_{ij} po Der Kiureghianu je funkcija razmerja lastnih frekvenc in razmernika dušenja. Za dobro ločene lastne frekvence velja $\rho_{ij} \rightarrow 0$ za $i \neq j$, s čimer se enačba (6) poenostavi v metodo korena vsote kvadratov (angl. *square root of sum of squares*,

okrajšano SRSS), ki predpostavi statistično neodvisnost modalnih prispevkov. CQC je danes standardna metoda seizmičnih analiz (Eurocode 8 [2], ASCE 4-98 [3]).

3 Metodologija

3.1 Filozofija razvijanja simulacijskega okolja

Izhodišče pri zasnovi vsakega simulacijskega okolja je realni inženirski problem: imamo konstrukcijo, ki jo želimo obremeniti in opazovati njen odziv. Takoj se pojavi vprašanje matematičnega popisa sistema; kaj sploh želimo popisati in kaj želimo kot rezultat. Hkrati je ta odločitev tesno povezana s tipom analize, ki jo okolje podpira, saj vrsta analize določa vhodne in izhodne veličine ter s tem primarno vpliva na način popisa sistema. Ključno dejstvo je, da bolje kot oblikovalec simulacijskega okolja pozna analizo oz. metodo, ki jo želi implementirati, bolje jo bo zasnoval. To dejstvo se lahko sliši samoumevno, vendar odkar smo ljudje razvili umetno inteligenco, je to dejstvo še kako na mestu; bolje ko oblikovalec s svojim znanjem o metodi vodi umetno inteligenco skozi korake metode, ki jih je potrebno razviti, boljši bo končni izdelek.

Mimogrede se pogosto ob tem pojavi še vprašanje obsega simulacijskega okolja. Ker se odgovor na slednje tekom razvoja pogosto bistveno spreminja, je za gradnjo simulacijskih okolij najpriporočljivejša metoda modularnega programiranja, pri kateri kompleksne algoritme razdelimo na manjše, medsebojno neodvisne module. Medsebojna neodvisnost omogoča nadgradnjo okolja z novimi metodami in tipi analize brez obsežnega prestrukturiranja obstoječe kode.

3.2 Arhitektura simulacijskega okolja TimoLab

Okolje TimoLab v svoji začetni fazi podpira analizo odzivnih spektrov, s katero pridobimo informacije o odzivu konstrukcije (običajno podan v enotah pomika) na predpisano vzbujanje podlage. Iz teoretičnih osnov vemo, da je analiza odzivnih spektrov poseben tip modalne superpozicije, zato je za njeno izvedbo nujno poznavanje modalne analize. Nadalje iz enačbe (1) razberemo, da modalna analiza zahteva poznavanje inercialskih (masna matrika $\mathbf{M}$), dušilnostnih (dušilna matrika $\mathbf{C}$) in togostnih lastnosti (togostna matrika $\mathbf{K}$) sistema. S tem se vrnemo k temeljnemu vprašanju matematičnega popisa sistema.

Ena izmed elegantnejših metod za sestavo matrik $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ in $\mathbf{K}$ je metoda končnih elementov. Ob njeni vpeljavi se vprašanje obsega znova pojavi: katero dimenzionalnost elementov implementiramo — eno-, dvo- ali tridimenzionalne. V projektu TimoLab smo se odločili za eno-dimenzijske elemente okvirja in paličja, implementirane modularno z mislijo na kasnejšo razširitev na dvo- in tridimenzionalne elemente. Z dosledno modularnostjo ostaja prostor za nadgradnjo okolja v nedogled.

Na ta način TimoLab v trenutni fazi vsebuje module (slika 1):

- **core** — Priprava numeričnega modela. Implementirani sta dve vrsti eno-dimenzijskih končnih elementov: prostorski dvo-vozliščni element okvirja z 12 prostostnimi stopnjami (6 na vozlišče: tri translacije in tri rotacije), za katerega sta podprti Euler-Bernoullijeva teorija upogiba (oblikovna funkcija povesa popisana s polinomom tretjega reda) in Timošenkova teorija (oblikovna funkcija povesa popisana s polinomom tretjega reda in oblikovna funkcija zasuka popisana z linearno funkcijo); ter prostorski dvo-vozliščni element paličja s 6 prostostnimi stopnjami (3 na vozlišče:

samo translacije). Masne in togostne matrike elementov so konsistentne, izpeljane iz energijskega pristopa, in implementirane lastno v *frame.py* in *truss.py*. Datoteka *transforms.py* transformira lokalne matrike v globalni koordinatni sistem; *assembly.py* sestavi globalno masno in togostno matriko ob upoštevanju robnih pogojev in zamreženosti (*mesh.py*).

- **solvers** — Reševanje numeričnega modela. Za modalno analizo generalizirani problem lastnih vrednosti v enačbi (2) reši uvožen algoritem iz knjižnice SciPy; nadaljnja masna normalizacija dobljenih lastnih vektorjev ($\tilde{\Phi}_i^T \mathbf{M} \tilde{\Phi}_i = 1$) in pravila seštevanja modalnih oblik, relevantna za reševanje analize odzivnih spektrov, so implementirana lastno.
- **post** — post-procesorska obdelava. Datoteka *deform.py* z oblikovnimi funkcijami interpolira vozliščne vrednosti pomikov v kvazi-zvezen potek; datoteke *forces.py*, *strain.py* in *stress.py* izračunajo izpeljanke vektorja pomikov; notranje obremenitve, specifične deformacije in napetosti.
- **visual** — modul za vizualizacijo rezultatov, ki se prikažejo v grafičnem uporabniškem vmesniku.
- **case** — komunikacijska linija med grafičnim vmesnikom in numeričnim jedrom. Vsebuje datoteke, specifične za vsako analizo, ki prenašajo uporabnikovo konfiguracijo (materialne lastnosti, geometrija, robni pogoji, itd.) iz vmesnika v jedro.

Numerično jedro okolja TimoLab je v pretežni meri implementirano lastno: formulacije oblikovnih funkcij ter masnih in togostnih matrik elementov, postavitve elementov v prostor, mreženje, uveljavitev robnih pogojev, sestava globalnih matrik in masna normalizacija lastnih oblik so razvite znotraj okolja. Edini uvoženi numerični algoritem je algoritem za reševanje generaliziranega problema lastnih vrednosti iz knjižnice SciPy. Za splošne matrične operacije se v ozadju uporablja knjižnica NumPy, za vizualizacijo rezultatov pa Matplotlib.

Verodostojnost numeričnega jedra je bila preverjena s serijo referenčnih primerov; validacija implementirane analize odzivnih spektrov pa temelji na primerjavi z rešitvijo komercialnega programa ANSYS, opisano v naslednjem poglavju.



Slika 1: Pregled nad sestavo jedra okolja TimoLab.

3.3 Referenčni primer — analiza odzivnih spektrov

Za validacijo analize odzivnih spektrov je izbran prostorski členkasto podprti element okvirja, katerega geometrijske in materialne lastnosti so podane v tabeli 1.

Tabela 1: Lastnosti konstrukcijskega elementa okvirja.

Lastnosti konstrukcijskega elementa okvirja	Oznaka	Vrednost	Enota
Materialne lastnosti			
Gostota	ρ	7850	kg/m ³
Modul elastičnosti	E	210	GPa
Poissonovo razmerje	ν	0,30	/
Geometrijske lastnosti			
Dolžina	L	1,5	m
Površina prereza	A	3,142	cm ²
Vztrajnostni moment (y)	I_y	0,7854	cm ⁴
Vztrajnostni moment (z)	I_z	0,7854	cm ⁴
Torzijska konstanta (Saint-Venantova torzija)	J	1,571	cm ⁴
Strižni oblikovni koeficient (lastnost Timošenkovskega nosilca)	κ_z	1	/
Mreža; število končnih elementov		15	

Na element okvirja je v vseh treh ortogonalnih smereh x , y , z predpisan umetno ustvarjen odzivni spekter, ki predstavlja udarno motnjo, modelirana kot pozitivni del sinusne periode dolžine 11 milisekund z amplitudo 60g, pri čemer je $g = 9.81\text{m/s}^2$. Definicijsko območje spektra je 100 milisekund, kjer je uporabljenih 1000 vzorčnih točk.

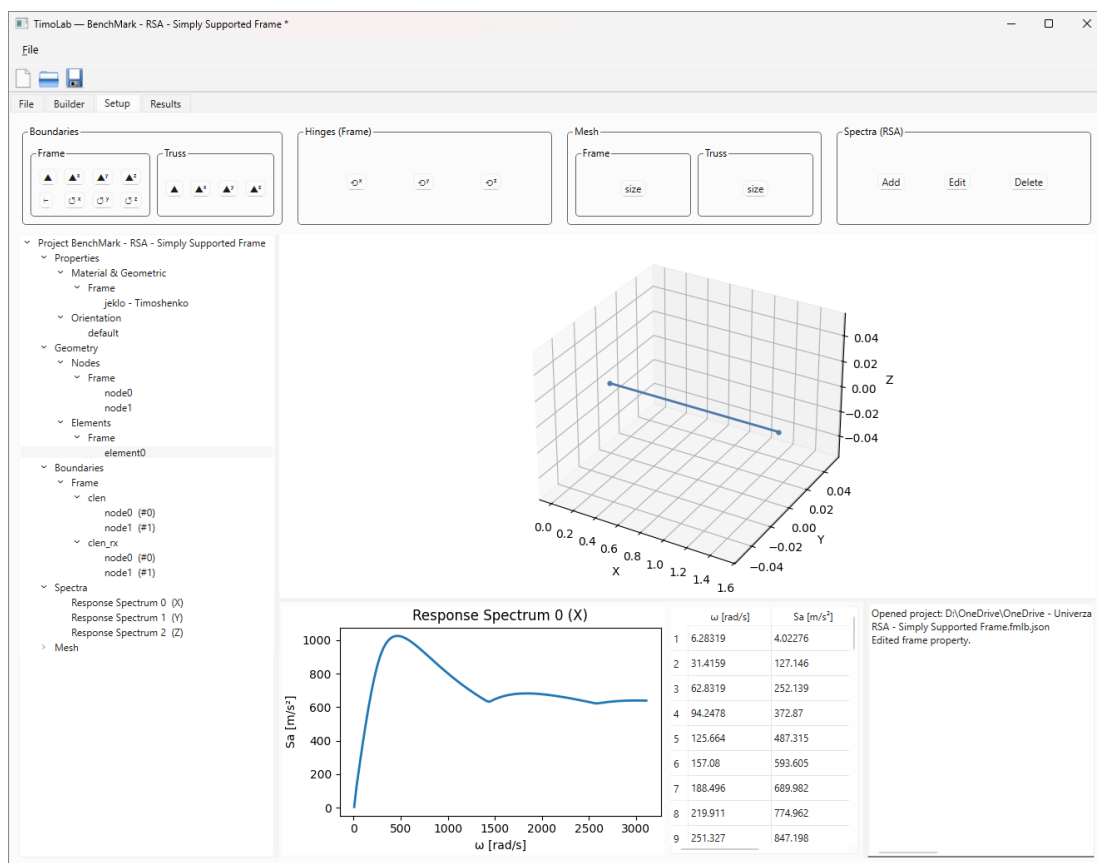
Numerična rešitev programa TimoLab je primerjana z rešitvijo komercialnega programa ANSYS (element BEAM188, enako mreženje). V obeh programih je za seštevanje modalnih prispevkov uporabljena metoda CQC z razmernikom dušenja $\zeta = 0,05$.

4 Rezultati

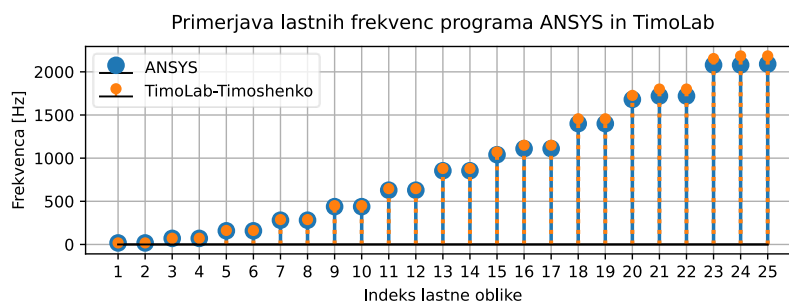
Vzporedno z numeričnim jedrom je bil razvit tudi grafični uporabniški vmesnik (angl. *graphical user interface*, okrajšano GUI), prikazan na sliki 2, ki uporabniku omogoča interaktivno gradnjo numeričnega modela, nastavitve parametrov analize in pregled rezultatov prek zavihkov *Builder*, *Setup* in *Results*. Vmesnik vključuje tridimenzionalni pogled modela, pregledovalnik odzivnih spektrov in drevesno strukturo za upravljanje vseh parametrov projekta. V nadaljevanju so predstavljeni rezultati validacije numeričnega jedra na referenčnem primeru.

4.1 Modalna analiza referenčnega primera

Pred analizo odzivnih spektrov je v okolju TimoLab izvedena modalna analiza referenčnega primera. Na sliki 3 je prikazana primerjava lastnih frekvenc, izračunanih v programu TimoLab, z vrednostmi programa ANSYS, pri čemer se giblje relativna napaka lastnih frekvenc okoli 3% TimoLab glede na ANSYS okoli 3%.



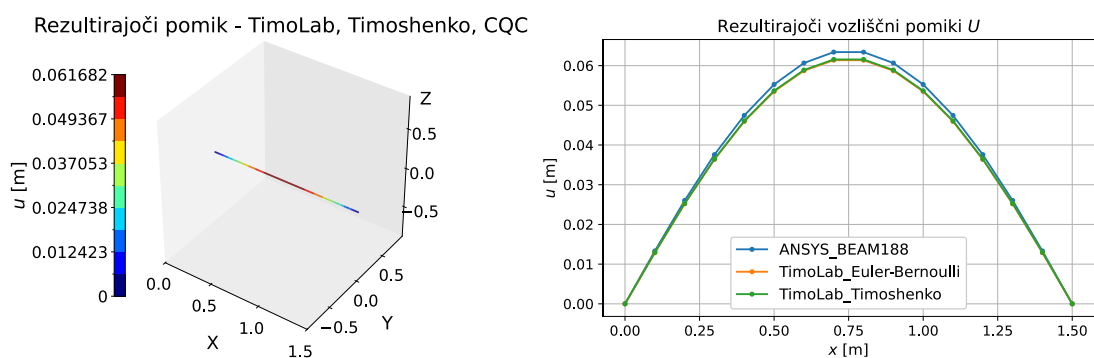
Slika 2: Prikaz delujočega grafičnega uporabniškega vmesnika.



Slika 3: Primerjava prvih 25 lastnih frekvenc programa ANSYS in TimoLab.

4.2 Analiza odzivnih spektrov referenčnega primera

Na sliki 4 je prikazana primerjava rezultirajočega vektorja pomikov, pridobljenega s programom TimoLab in s programom ANSYS, pri uporabi pravila CQC z razmernikom dušenja $\zeta = 0,05$.



Slika 4: Primerjava rezultirajočega vektorja pomikov: TimoLab rešitev – Timošenkova teorija (leva); primerjava pomikov ANSYS in TimoLab modelov (desna).

Relativna napaka maksimalne vrednosti rezultirajočega pomika znaša približno -3,1 %. Odstopanje je konsistentno in ga je najverjetneje mogoče pripisati kombinaciji več dejavnikov: razlikam v formulaciji masnih in togostnih matrik okvirnega elementa med obema programoma, razlikam v izračunanih lastnih frekvencah, ki vplivajo na odčitek vrednosti iz odzivnega spektra, ter različni obravnavi modalnih prispevkov z lastnimi frekvencami izven frekvenčnega območja podanega spektra. Kljub navedenim razlikam rezultati izkazujejo dobro ujemanje in ostajajo znotraj sprejemljivih meja za inženirsko uporabo.

5 Zaključki

V prispevku je predstavljeno simulacijsko okolje TimoLab za analizo odzivnih spektrov prostorskih okvirnih konstrukcij, razvito v programskem jeziku Python na osnovi metode eno-dimenzijskih končnih elementov. Iz predstavljenih rezultatov izhajajo naslednje ugotovitve: 1) Modularna arhitektura okolja, razdeljena na module *core*, *solvers*, *post* in *visual*, zagotavlja preglednost implementacije in omogoča razširitev z novimi analizami ali tipi končnih elementov brez posegov v obstoječe module. 2) Rezultati analize odzivnih spektrov se ujemajo z vrednostmi komercialnega programa ANSYS z relativno napako ~3,1 %. 3) Odprtokodna narava okolja TimoLab omogoča neposreden vpogled v implementacijo posameznih korakov analize odzivnih spektrov, kar ga dela primerno za razvoj novih numeričnih modelov.

V prihodnje je predvidena razširitev obstoječe metode končnih elementov v TimoLabu na dvo- in tri-dimenzionalne končne elemente. V daljši prihodnosti pa se osredotočamo na razvoj metode končnih volumnov, uporabno za reševanje fluidnih problemov.

Literatura

- [1] COMSOL Multiphysics: *Response Spectrum Analysis*. Dostopno na: <https://www.comsol.com/multiphysics/response-spectrum-analysis>, ogled 19.6.2026.
- [2] EN 1998-1:2004. *Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance – Part 1: General Rules, Seismic Actions and Rules for Buildings*, 2004.
- [3] ASCE 4-98. *Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary. Standards*, 1998.

Modeliranje vpliva izhlapevanja pri 3D CFD simulaciji segrevanja vlažne opeke v gospodinjski pečici

Nejc Vovk¹, Jana Wedel², Simona Rustico³, Ivan Dominik Horvat¹, Beatrice Pulvirenti³, Paul Steinmann², Jure Ravnik¹

Modelling the Effect of Evaporation in a 3D CFD Simulation of Wet-Brick Heating in a Domestic Oven

Povzetek. V prispevku je predstavljena implementacija in rezultati praktičnega modela izhlapevanja vode za 3D CFD digitalni dvojček gospodinjske pečice med standardiziranim preskusom EN 60350. Vlažna glinena opeka predstavlja toplotno breme, pri kateri se pomemben del dovedene toplote porabi za uparjanje vode. Če se ta mehanizem zanemari, numerični model napove previsoko temperaturo površine in prehitro segrevanje jedra opeke. Predlagani pristop uvaja izhlapevanje kot energijski ponor na površini opeke. Model je vključen v izračun s programom OpenFOAM, skupaj s sklopljenim prenosom toplote in sevanjem, ter dinamiko termostata in termočlena. Rezultati kažejo, da upoštevanje izhlapevanja omeji temperaturo površine na približno 100 °C in bistveno izboljša ujemanje numerične temperature jedra z eksperimentom.

Abstract. This paper presents a practical evaporation treatment for a 3D CFD digital twin of a domestic forced-convection oven operated according to the EN 60350 thermal-load test. The wetted clay brick is a porous load for which neglecting moisture evaporation leads to excessive surface temperature and substantial overprediction of the core heating rate. The proposed model converts an experimentally fitted zero-dimensional evaporation law into a boundary heat sink for 3D CFD. Conservation of the experimentally measured total water loss is imposed by one calibration coefficient. The model is implemented in OpenFOAM together with conjugate heat transfer, a fan pressure jump and thermostat/thermocouple dynamics. Results show that evaporation limits the surface temperature to approximately 100 °C and significantly improves the agreement of the core temperature with the experiment.

Ključne besede. CFD, gospodinjska pečica, EN 60350, izhlapevanje, latentna toplota, sklopljen prenos toplote, OpenFOAM.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Smetanova 17, SI-2000 Maribor, Slovenija, nejc.vovk@um.si

² Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Nemčija

³ University of Bologna, Italy

1 Uvod

Gospodinjske pečice so procesne naprave, ki združujejo vse mehanizme prenosa toplote; prisilno konvekcijo, toplotno sevanje in prevod toplote skozi stene in police. Za podajanje nazivnega energijskega razreda gospodinjskih pečic, ki ga zahteva EU zakonodaja, se proizvajalci poslužujejo standarda EN 60350 [8]. Za oceno učinkovitosti standard predpisuje segrevanje termičnega bremena v pečici in spremljanje temperature njegove sredice. Kot termično breme standard predpisuje navlaženo glineno opeko. Med segrevanjem voda iz porozne strukture izhlapeva, zato se del dovedene toplote porabi kot latentna toplota. Posledično površina opeke ostaja blizu temperature vrelišča oziroma blizu območja intenzivnega izhlapevanja, jedro pa se zato segreva počasneje, kot bi se v primeru suhe snovi.

3D CFD digitalni dvojček pečice je uporaben, ker omogoča vpogled v porazdelitev hitrosti, lokalne toplotne tokove, vpliv geometrije zadnje pregrade in delovanje ventilatorja, vendar geometrijsko natančen model sam po sebi ni zadosten, če je robni pogoj na vlažni opeki fizikalno nepopoln. Če v numeričnem modelu ne upoštevamo izhlapevanja, je napovedana površinska temperatura previsoka, posledično pa tudi prevelik toplotni tok v jedro. To vpliva na izračun časa, ki je potreben za dvig temperature jedra za 55 K, in s tem na oceno energijske učinkovitosti pečice.

Cilj prispevka je predstaviti preprost, računsko nezahteven in praktično uporaben model izhlapevanja, ki ga je mogoče neposredno vključiti v 3D CFD simulacijo pečice. Namen pristopa ni nadomestiti popolnega modela transporta vlage v poroznem materialu, temveč zajeti dominantni energijski učinek fazne spremembe. Tovrstni model tako postane uporaben v fazi razvoja pečice, ki vključuje razmestitev grelnih elementov, dimenzioniranje ventilatorja, načrtovanje oblike komore, in razmestitev zračnih odprtin na pokrovu ventilatorja.

Razvoj numeričnih modelov gre predvsem v dveh smereh; kot podrobni 3D CFD modeli, namenjeni analizi tokovnega in temperaturnega polja, ter kot reducirani modeli koncentriranih parametrov, namenjeni hitri energijski analizi in razvoju regulacijskih strategij. CFD pristopi omogočajo podroben vpogled v vpliv ventilatorja, grelnih elementov, geometrije komore in odprtin na pokrovu ventilatorja na lokalno porazdelitev hitrosti in temperature. Kokolj et al. [2] so na primeru peke krhkega testa pokazali, da lahko časovno odvisen 3D CFD model prisilno konvekcijske pečice zadovoljivo napove temperaturno polje in stopnjo zapečenosti. Pri tem so ugotovili, da izhlapevanja vode ni mogoče zanemariti, saj je model brez upoštevanja izhlapevanja bistveno precenil temperaturo bremena. Na drugi strani so reducirani modeli bistveno hitrejši in zato primerni za energijsko analizo in optimizacijo regulacije pečice. Ramirez-Laboreo et al. [5] so razvili dinamični reduciran model pečice, v katerega so vključili prenos toplote in mase med pečico in vlažnim bremenom. Lucchi et al. [3] so ta pristop dodatno razvili za standardni preizkus z vlažno opeko po EN 60350, pri čemer prenosne pojave v opeki popisali z dvema območjema; zunanjim, kjer poteka primarno izhlapevanje in sredica, kjer so zaradi počasne difuzije vlage in posledično majhnih koncentracijskih gradientov, termofizikalne lastnosti konstantne. Novejše raziskave združujejo prednosti obeh pristopov. Rustico et al. [7] so uporabili večnivojski pristop, kjer so iz stacionarnih CFD simulacij določili konvektivne in sevalne koeficiente prenosa toplote, nato pa jih uporabili v hitrem dinamičnem modelu z zgoščenimi parametri za oceno porabe energije. V nadaljnjem delu so avtorji podoben dinamični model

uporabili tudi za optimizacijo delovanja grelnih elementov s Pareto fronto, s ciljem zmanjšanja porabe energije in časa preizkušanja [6]. Kljub temu obstoječi modeli izhlapevanje obravnavajo bodisi v reducirani obliki (kalibriran konvektivni robni pogoj [7, 6]) bodisi kot poenostavljen energijski ponor v specifičnem živilu [2]. Slabost reduciranih modelov s koncentriranimi parametri je zahteva po vnaprej kalibriranih veličinah, s katerimi lahko simuliramo izključno že izdelane dizajne komor pečice. Izhlapevanje v 3D CFD modelih mora temeljiti na fizikalnih modelih prenosa toplote, saj smo v primeru kalibriranih konvektivnih robnih pogojev spet odvisni od samega dizajna komore na kateri je bila kalibracija izvedena.

V tem prispevku predstavljamo implementacijo modela izhlapevanja v 3D CFD simulacijo standardnega preizkusa pečice z vlažno opeko po standardu SIST EN IEC 60350-1:2023 [8]. V nasprotju s preteklimi modeli, naš model temelji na fizikalnih predpostavkah, kjer izhlapevalo vodo obravnavamo prek latentnega toplotnega toka na površini opeke. Lokalni tok izhlapevanja je določen iz razlike med nasičenim parnim tlakom vode pri temperaturi površine opeke in parnim tlakom vodne pare v zraku znotraj komore. S tem postane naš model splošno uporaben za simulacije standardnega testa.

Model je implementiran v odprtokodnem okolju OpenFOAM [9] in uporabljen za simulacijo prisilno konvekcijskega segrevanja vlažne opeke. Rezultati so primerjani z eksperimentalnimi meritvami temperature v jedru opeke ter z numeričnim primerom, v katerem je izhlapevanje zanemarjeno.

2 Eksperimentalni in numerični pristop

2.1 Preskus EN 60350

Eksperiment je bil izveden v načinu prisilne konvekcije pri nastavljeni temperaturi 200 °C. Dimenzije glinene opeke, uporabljene kot termično breme, znaša $230 \times 114 \times 64$ mm. Suha masa opeke znaša 920 ± 75 g. Pred preskusom je bila opeka osem ur namočena v hladni vodi, pri čemer je skupna masa narasla na 1050 ± 50 g, začetna temperatura jedra pa je znašala 5 ± 2 °C. Opeka je bila vstavljena v sredino komore pečice. Temperatura je bila merjena v sredici glinene opeke s Pt500 termočlenom, kot zapoveduje standard. Preskus se je končal, ko se je temperatura jedra povečala za 55 K.

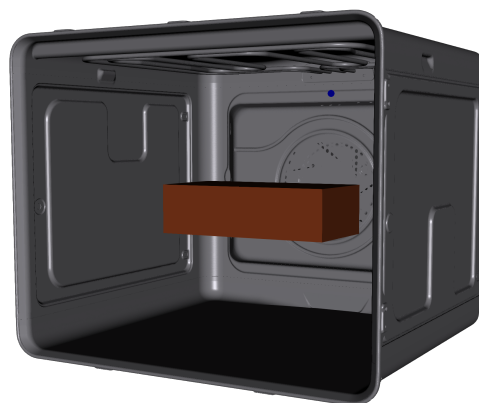
2.2 Digitalni dvojček pečice

Numerično območje zajema notranjo komoro pečice, ventilatorsko pregrado z odprtinami, območje ventilatorja, grelne elemente in opeko. Tok zraka je sklopljen s prenosom toplote. Ventilator smo modelirali kot tlačno razliko. Takšna poenostavitev, prikazana na sliki 2, bistveno zmanjša računsko zahtevnost in je za dolge prehodne simulacije standardiziranega preskusa bolj praktična od uporabe pristopa MRF ali rotirajoče geometrije. Poleg tega, skrbijo za distribucijo zračnih tokov v komori izvrtine v ventilatorski pregradi, s katerimi lahko tok zraka v komori bistveno bolj nadzorujemo, kot s samo geometrijo ventilatorskih lopatic, zato je takšna poenostavitev modela smiselna.

Slika 3 prikazuje uporabljene robne pogoje v numeričnem modelu pečice. Rdeče označene površine predstavljajo aktivne grelne površine, kjer je toplotni tok določen iz predpisane moči

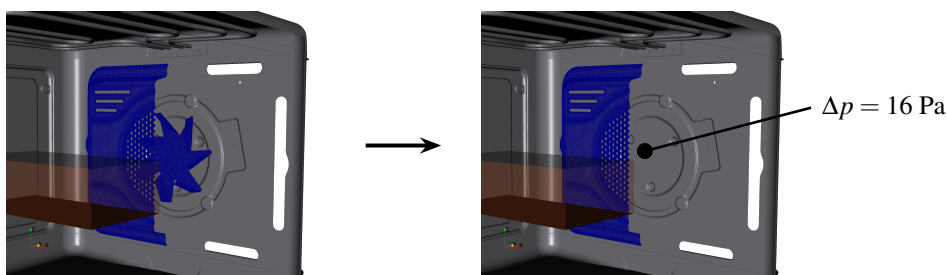


(a) Eksperimentalna pečica



(b) Numerični dvojček z lego opeke.

Slika 1: Eksperimentalna in numerična postavitev preskusa z navlaženo opeko. Opeka je v eksperimentu postavljena na rešetko s tankimi rebri. Ker je vpliv rešetke na tokovno polje bistveno manjši, kot vpliv opeke, smo geometrijo rešetke zanemarili.



Slika 2: Prikaz geometrije komore za zamenjavo ventilatorja z modelom tlačne razlike.

posameznega grelca in skupnega termostatskega signala, medtem ko so zunanje stene modelirane s konvektivnim robnim pogojem.

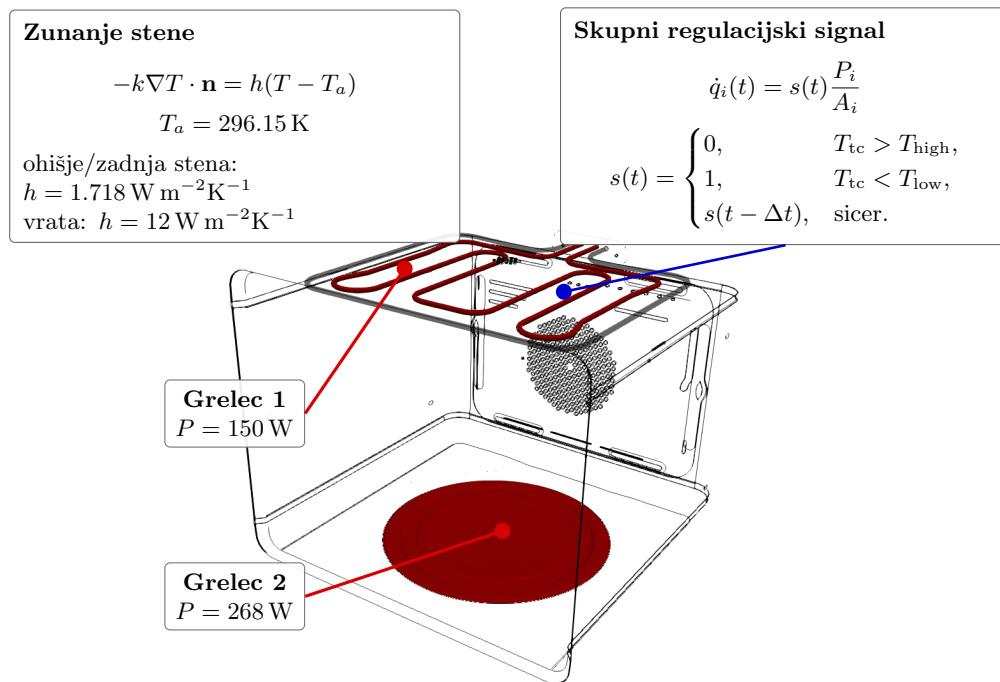
Glavni podatki preskusa in numeričnega modela so zbrani v tabeli 1. Model vključuje tudi dinamiko termostata in odziv termočlena, saj regulacija grelcev v dejanski pečici povzroča časovna nihanja temperature zraka in posledično nihanja površinske temperature opeke.

3 Matematični model

3.1 Enačbe toka in prenosa toplote

Zrak v pečici je obravnavan kot stisljiva newtonska tekočina. Osnovne enačbe za ohranitev mase, gibalne količine in entalpije so

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$



Slika 3: Shematski prikaz robnih pogojev v CFD modelu. Rdeče označene površine predstavljajo aktivne grelné površine, ki se vklaplajo z istim termostatskim signalom. T_a predstavlja temperaturo okolice, ki služi za izračun konvektivnega toplotnega toka izgub na stenah komore.

Tabela 1: Glavni podatki in modelne predpostavke.

Količina	Vrednost oziroma izbira
Način delovanja pečice	Prisilna konvekcija, nastavitev $200 \text{ }^{\circ}\text{C}$
Opeka	$230 \times 114 \times 64 \text{ mm}$, $920 \pm 75 \text{ g}$ suha masa, $1050 \pm 50 \text{ g}$ po namakanju
Začetna temperatura opeke	$5 \pm 2 \text{ }^{\circ}\text{C}$
Meritev temperature	Pt500 na površini in v jedru na globini 32 mm
Kriterij konca preskusa	Dvig temperature jedra za 55 K
Predpostavka vlažnosti	Konstantna relativna vlažnost $\phi = 50\%$ (sistem za odvajanje vodne pare v komori pečice)
CFD model	OpenFOAM v11, stisljiv tok, RANS $k-\omega$, konjugiran prenos toplote
Model ventilatorja	Tlačna razlika kot izvor gibalne količine

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} h) = \nabla \cdot \left(k \nabla \frac{h}{c_p} \right) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) + S_h. \quad (3)$$

Pri tem so $\mathbf{u}$ hitrost, p tlak, ρ gostota, $\boldsymbol{\tau}$ tenzor viskoznih napetosti, h entalpija, k toplotna prevodnost in c_p specifična toplota. Člen $\mathbf{f}$ zajema volumnske izvore gibalne količine, predvsem vpliv ventilatorja. Turbulentni tok je modeliran z RANS modelom $k-\omega$.

Prenos toplote v opeki je opisan z enačbo prevoda toplote

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \alpha_s \nabla^2 T_s, \quad (4)$$

kjer je T_s temperatura trdnine, $\alpha_s = k_s/(\rho_s c_{p,s})$ pa toplotna difuzivnost mokre opeke. Na stikih med tekočino in trdnimi deli sta zagotovljeni zveznost temperature in toplotnega toka. Dodatno je upoštevano sevanje med notranjimi površinami komore, saj je pri temperaturah okoli 200 °C sevalni prispevek k segrevanju pomemben.

3.2 Model izhlapevanja

Uporabljeni model izhlapevanja izhaja iz Lucchi et al. [3], kjer je bila podobna logika uporabljena v reduciranem, 0D modelu standardnega preskusa EN 60350 z vlažno opeko. V našem delu, isti fizikalni pristop razširimo na 3D CFD simulacijo, kjer izhlapevanje ni več obravnavano kot ena sama povprečena veličina za celotno opeko, temveč lokalno, po površinskih celicah opeke. Lokalni masni tok izhlapevanja je zato določen iz lokalne temperature površine in razlike med nasičenim parnim tlakom vode ter parnim tlakom vodne pare v zraku komore pečice, ki zavisi od lokalnega hitrostnega polja zraka okoli opeke:

$$\dot{m}_w = DA_b [p_{\text{sat}}(T_b) - p_{v,\infty}]^+. \quad (5)$$

Koeficient D predstavlja efektivni koeficient prestopa snovi v m/s. Notacija $[]^+$ pomeni, da bo masni tok zaradi izhlapevanja predpisan, kadar bo razlika med nasičenim in parnim tlakom pozitivna. Določen je na osnovi eksperimentalno izmerjene skupne izgube vode med preskusom,

$$D = \frac{m_{w,\text{tot}}^{\text{exp}}}{A_b \int_0^{t_{\text{end}}} [p_{\text{sat}}(T_b^{\text{exp}}(t)) - p_{v,\infty}]^+ dt}, \quad (6)$$

pri čemer je D določen v območju primarnega sušenja, kjer je skupna izhlapela masa približno linearna s časom [1]. Linearno naraščanje izhlapele mase je bilo opaženo tudi v eksperimentalnih rezultatih [3], zato lahko tako določen koeficient razumemo kot prenosljiv efektivni parameter za preskuse EN 60350, dokler proces ostaja v režimu primarnega izhlapevanja.

V 3D izračunu se ta model uporabi lokalno na površini opeke. Vsaka površinska celica ima svojo trenutno temperaturo, zato se tudi lokalni nasičeni parni tlak in posledično lokalna hitrost izhlapevanja po površini spreminjata. Skupni masni tok je tako rezultat prostorsko neenakomernega prispevka vseh površinskih celic, kar omogoča zajem vpliva nehomogenega tokovnega in temperaturnega polja v komori pečice. Masni tok izhlapevanja se nato pretvori v latentni toplotni tok

$$\dot{q}_{\text{evap}} = \dot{m}_w L_v, \quad (7)$$

kjer je L_v uparjalna toplota vode. Ko se površina opeke segreje, se nasičeni parni tlak poveča, izhlapevanje postane intenzivnejše, latentni ponor pa omeji nadaljnji dvig površinske temperature.

3.3 Regulacija temperature pečice

Pečica obratuje s termostatsko regulacijo. Dinamika termočlena je opisana z ODE prvega reda,

$$\frac{dT_{tc}}{dt} = \frac{1}{\tau_{tc}} (T_{cell} - T_{tc}), \quad (8)$$

kjer je T_{tc} zakasnjena temperatura termočlena, T_{cell} trenutna temperatura v celici, kjer je termočlen nameščen, τ_{tc} pa časovna konstanta odziva termočlena, ki znaša 5s, in je skladna z odzivnimi časi tipičnih tipal [4]. Regulacija grelcev tako temelji na merjeni in ne na trenutni lokalni temperaturi zraka.

Vpliv časovnega koraka je bil ocenjen z analizo občutljivosti. Izračunan red časovne konvergenke je znašal 1.48, ocenjena numerična negotovost po metodi Celika pa 0.3 % za fino in 2.7 % za grobo časovno diskretizacijo.

4 Rezultati in razprava

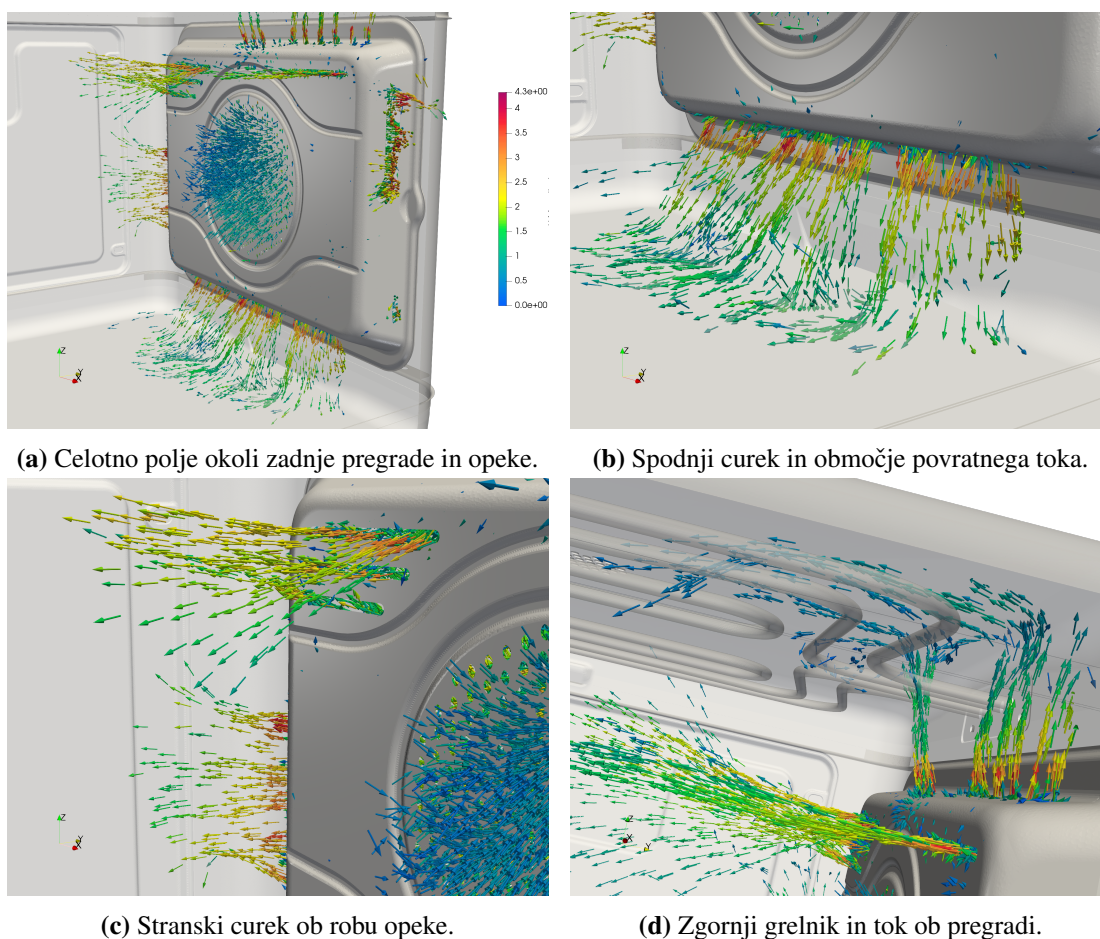
4.1 Hitrostno polje v pečici

Ventilator in zadnja pregrada ustvarita izrazito tridimenzionalno recirkulacijo. Tlačno polje, ki ga ventilator ustvari v ohišju povzroči, da zrak izstopa skozi odprtine v obliki lokalnih curkov, obliva grelce in robove opeke in se vrača proti območju ventilatorja (slika 4). Slika 5 prikazuje, da obremenitev ni izpostavljena enakomernemu enodimenzionalnemu toku. Na opeko vplivajo stranski curki, spodnja povratna območja, tok ob zgornjem grelniku in lokalne ločitve toka ob odprtinah zadnje pregrade.

4.2 Vpliv izhlapevanja na temperaturni odziv

Slika 6 primerja izračunane temperature površine opeke in njenega jedra za model z izhlapevanjem in za model, v katerem je izhlapevanje zanemarjeno. Dodana je tudi eksperimentalna temperatura jedra, ki predstavlja validacijsko referenco. Le-ta prikazuje povprečen temperaturni potek štirih opravljenih eksperimentov pod enakimi pogoji. Model brez izhlapevanja napove hitro rast površinske temperature nad 150 °C in poznejše približevanje stacionarni vrednosti okoli 175 °C. Tak rezultat ni skladen z vlažno porozno obremenitvijo, saj se velik del dovedene toplote porablja za uparjanje vode.

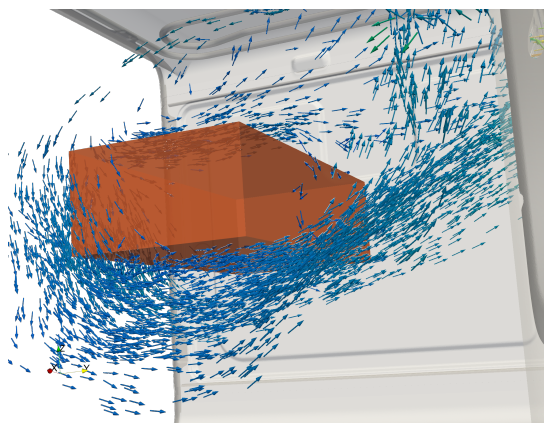
Slika 7 prikazuje izrazit vpliv sevalnega prenosa toplote na segrevanje vlažne opeke. Model z upoštevanjem sevanja napove bistveno višjo temperaturo površine opeke, ki se po začetnem prehodnem obdobju ustali v območju približno 90–100 °C. Nasprotno model brez sevanja napove občutno nižjo površinsko temperaturo, približno 60–70 °C, kar kaže, da konvekcija sama ne zadošča za pravilen opis toplotnega toka proti opeki. Razlika se neposredno odrazi tudi v temperaturi jedra opeke. Rezultati potrjujejo, da je sevalni prenos toplote v komori pečice ključen mehanizem in ga pri CFD simulaciji preskusa EN 60350 ni mogoče zanemariti.



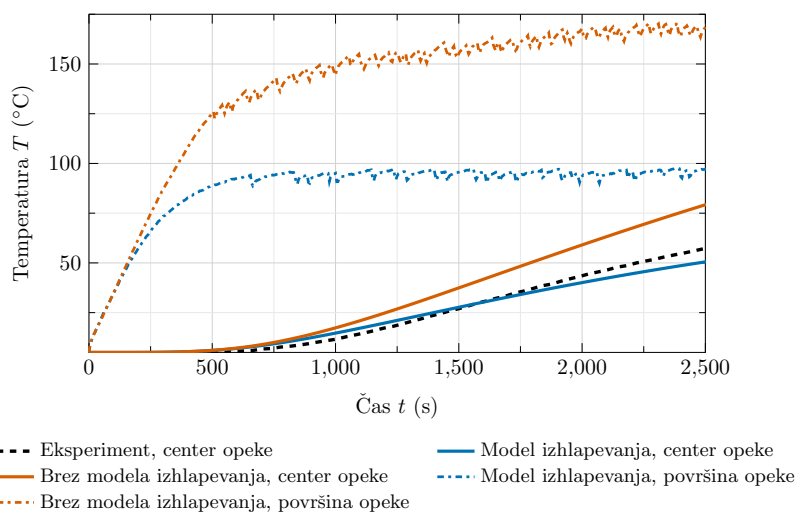
Slika 4: Trenutni vektorji hitrosti v notranjosti pečice. Barva vektorjev označuje velikost hitrosti, smeri pa kažejo izrazito lokalno nehomogenost konvekcije.

Pri modelu z izhlapevanjem površinska temperatura med glavnim delom segrevanja ostane blizu $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Nihanja zaradi termostatskega vklapljanja in izklapljanja grelcev so še vedno vidna, vendar latentni toplotni ponor prepreči nerealno segrevanje površine. Enak mehanizem vpliva tudi na jedro. Pri suhem modelu je toplotni tok v notranjost prevelik, zato je temperatura jedra v poznejšem delu preskusa precejšena za več kot $30\text{ }^{\circ}\text{C}$. Model z izhlapevanjem bistveno bolje sledi eksperimentalnemu trendu.

Pomembna ugotovitev je, da razlika med modeloma ne izhaja samo iz opisa toka zraka. Tudi podrobno izračunano hitrostno polje ne zagotovi pravilnega odziva obremenitve, če je energijska bilanca na površini vlažne opeke nepopolna. Izhlapevanje neposredno zmanjša neto toplotni tok, ki je na voljo za prevod v jedro. Zato se zdi predlagani robni model primeren inženirski kompromis med popolnoma suhim modelom in bistveno zahtevnejšim modelom transporta vlage v poroznem materialu.



Slika 5: Tokovno polje okoli opeke.

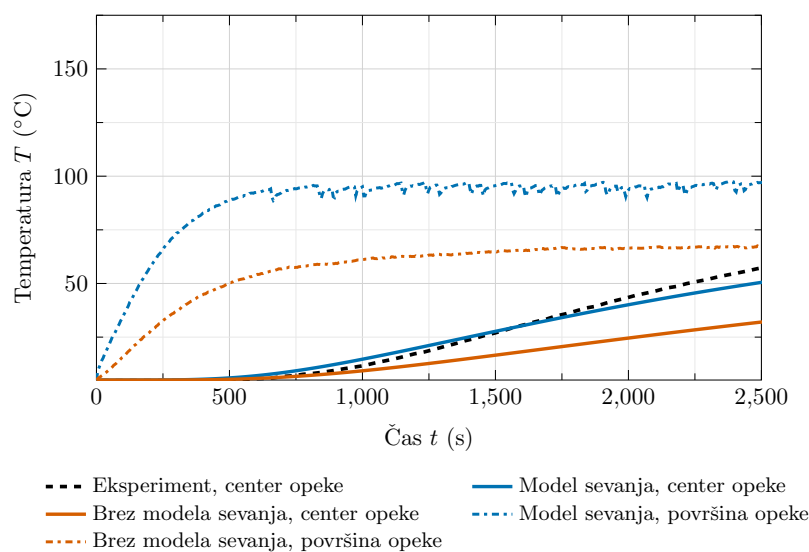


Slika 6: Primerjava temperatur površine in jedra opeke za model z izhlapevanjem in za model brez izhlapevanja. Eksperimentalna temperatura jedra je uporabljena kot validacijska referenca.

5 Sklep

V tridimenzionalni CFD digitalni dvojček gospodinjske pečice je bil vključen praktičen model izhlapevanja za preskus EN 60350 z navlaženo glineno opeko. Model temelji na razliki med nasičenim parnim tlakom pri temperaturi površine opeke in parnim tlakom v zraku pečice. En umeritveni koeficient je določen iz eksperimentalno izmerjene skupne izgube mase vode, izračunani masni tok pa je pretvorjen v latentni toplotni ponor na površini opeke.

Zanemarjanje izhlapevanja vodi do nerealno visoke površinske temperature in do precenitve temperature jedra za več kot 30 °C. Upoštevanje izhlapevanja omeji površinsko temperaturo na približno 100 °C in bistveno izboljša ujemanje z eksperimentom. Model zato predstavlja



Slika 7: Primerjava temperatur površine in jedra opeke za model z upoštevanjem sevanja in za model brez sevanja. Eksperimentalna temperatura jedra je uporabljena kot validacijska referenca.

uporaben kompromis; ohrani podroben 3D opis toka, sevanja, termostatskega delovanja in konjugiranega prenosa toplote, obenem pa se izogne stroškom popolnega poroznega modela vlage. Nadaljnje delo vključuje upoštevanje toplotne kapacitivnosti sten pečice.

Literatura

- [1] M. Hriberšek, L. Škerget, and A. Poredoš. *Procesna tehnika. Del 1, Osnove, mešanje, sušenje*. Fakulteta za strojništvo, Maribor, 2005.
- [2] U. Kokolj, L. Škerget, and J. Ravnik. A numerical model of the shortbread baking process in a forced convection oven. *Applied Thermal Engineering*, 111:1304–1311, 2017.
- [3] M. Lucchi, N. Suzzi, and M. Lorenzini. Dynamic model for convective heating of a wet brick during energy characterisation of domestic electric ovens. *Applied Thermal Engineering*, 161:114117, 2019.
- [4] Moore Industries-International, Inc. WORM Flexible Sensor Kits for Thermowell Temperature Assemblies. Technical report, Moore Industries-International, Inc., 2019.
- [5] E. Ramirez-Laboreo, C. Sagues, and S. Llorente. Dynamic heat and mass transfer model of an electric oven for energy analysis. *Applied Thermal Engineering*, 93:683–691, 2016.
- [6] S. Rustico, B. Bonfanti Pulvirenti, and M. Reguzzoni. Application of a multi-objective optimisation (MOO) via pareto front to the energy performance of a domestic oven. *Processes*, 14(6):979, 2026.

- [7] S. Rustico, B. Pulvirenti, G. Useli, and M. Reguzzoni. Multi-level simulation for dynamic analysis of a domestic electric oven in forced convective heating—evaluation and optimization of energy consumption using the brick test. *Future Cities and Environment*, 11, 2025.
- [8] Slovenski inštitut za standardizacijo. SIST EN IEC 60350-1:2023 – Gospodinjski električni kuhalni aparati – 1. del: Štedilniki, pečice, parne pečice in žari – Metode za merjenje funkcionalnosti (IEC 60350-1:2023), 2023.
- [9] H. G. Weller, G. Tabor, H. Jasak, and C. Fureby. A Tensorial Approach to Computational Continuum Mechanics Using Object-Oriented Techniques. 12(6):620–631.



Hibridni pristop za tvorbo učnih podatkov za strojno učenje pri diagnostiki poškodovanosti spojev v sestavljenih konstrukcijah

Tim Vrtač¹, Domen Ocepek¹, Gregor Čepon¹

A Hybrid Modeling Strategy for Training Data Generation in Machine Learning-Based Structural Health Monitoring

Povzetek. Strojno učenje omogoča hitro in zanesljivo diagnostiko poškodovanosti konstrukcij, vendar je njegova uspešnost pogojena z razpoložljivostjo dovolj obsežne in raznolike učne množice, ki je v praksi pogosto težko dosegljiva. V prispevku je predstavljen hibridni pristop za tvorbo učne množice za diagnostiko poškodovanosti spojev v sestavljenih konstrukcijah. Eksperimentalne in numerične modele posameznih delov konstrukcije z metodami dinamskega podstrukturiranja združimo v hibridne modele, te pa sklopimo z analitičnimi modeli spojev, katerih togost poljubno spreminjamo in s tem simuliramo različne stopnje poškodovanosti. Na ta način je mogoče ob razmeroma majhnem eksperimentalnem naporu tvoriti veliko realističnih vzorcev učne množice. Pristop je bil preizkušen na laboratorijski konstrukciji, kjer je bil na osnovi tvorjenih podatkov treniran SVM klasifikator (metoda podpornih vektorjev), njegova uspešnost pa preverjena tako na numeričnih kot na eksperimentalnih podatkih.

Abstract. Machine learning enables fast and reliable structural damage identification, but its performance depends on the availability of a sufficiently large and diverse training set, which is often hard to obtain in practice. This paper presents a hybrid approach to generating a training set for the identification of joint damage in assembly structures. Experimental and numerical models of individual assembly parts are combined into hybrid models using dynamic substructuring methods, and coupled with analytical joint models whose stiffness is varied to simulate different degrees of damage. This makes it possible to generate a large number of realistic training samples with a reasonable experimental effort. The approach was demonstrated on a laboratory structure, where the generated data was used to train an SVM classifier (support vector machine method), validated on both numerical and experimental data.

1 Uvod

Metode strojnega učenja (ang. *machine learning*; ML) se vse pogosteje uporabljajo za diagnostiko poškodovanosti konstrukcij (ang. *structural health monitoring*, SHM), saj omogočajo

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

zgodnje odkrivanje poškodb in napovedno vzdrževanje. Uspešnost nadzorovanega učenja pri tem ni odvisna le od algoritma, temveč predvsem od kakovosti in obsežnosti učne množice, ki mora vsebovati dovolj vzorcev nepoškodovanega in poškodovanega stanja konstrukcije.

Učni podatki so običajno pridobljeni eksperimentalno ali z numeričnimi simulacijami. Eksperimentalni pristop zanesljivo zajame realne dinamske lastnosti konstrukcije, vendar je pridobivanje zadostnega števila poškodovanih vzorcev pogosto časovno in stroškovno zahtevno. Numerične simulacije (npr. z metodo končnih elementov) po drugi strani omogočajo hitro generiranje velikega števila vzorcev, vendar je zanesljivost podatkov pogojena z natančnostjo modela pri opisu dejanskega obnašanja konstrukcije. To je spodbudilo razvoj vmesnih, hibridnih pristopov, npr. koncept digitalnega dvojčka za simulacijo scenarijev poškodbe v virtualnem okolju, ki pa je omejen na semi-analitične modele [4].

V tem prispevku je predstavljen alternativni, hibridni pristop k tvorbi učne množice, ki temelji na dinamskem podstrukturiranju v frekvenčni domeni. Eksperimentalni model, izmerjen v majhnem številu točk, razširimo na visoko prostorsko gostoto numeričnega modela, poškodbe pa simuliramo na nivoju analitičnih modelov spojev, kjer se poškodbe sestavljenih konstrukcij najpogosteje pojavijo.

2 Sklapanje podstruktur v frekvenčni domeni

Dinamsko sklapanje v frekvenčni domeni (ang. *Frequency Based Substructuring*; FBS) omogoča določitev dinamskih lastnosti sestavljene konstrukcije iz admitančnih matrik njenih podstruktur. Za nesklapljen sistem, obremenjen z zunanji silami $f(\omega)$ in kontaktnimi silami $g(\omega)$ na kontaktnih prostostnih stopnjah, velja:

$$u(\omega) = \mathbf{Y}(\omega)(f(\omega) + g(\omega)), \quad (1)$$

kjer je $u(\omega)$ vektor odzivov, $\mathbf{Y}(\omega)$ pa nesklapljena admitančna matrika sistema, sestavljena iz admitančnih matrik posameznih podstruktur, postavljenih po diagonalni.

Pri sklapanju podstruktur na kontaktu vsilimo kompatibilnostni in ravnotežni pogoj. Kompatibilnostni pogoj zahteva enakost pomikov na paru kontaktnih prostostnih stopenj:

$$\mathbf{B}u(\omega) = 0, \quad (2)$$

kjer je $\mathbf{B}$ Boolova matrika, ki poveže pripadajoče pare kontaktnih prostostnih stopenj. Ravnotežni pogoj zahteva, da so kontaktne sile v posameznem paru enake po velikosti in nasprotno predznačene, kar lahko zapišemo z vektorjem Lagrangevih množiteljev $\lambda(\omega)$:

$$g(\omega) = -\mathbf{B}^T \lambda(\omega). \quad (3)$$

Z upoštevanjem pogojev (2) in (3) v enačbi (1) dobimo admitančno matriko sklopljenega sistema $\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)$:

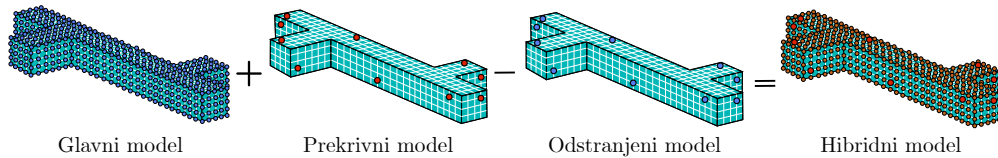
$$\tilde{\mathbf{Y}}(\omega) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{Y}(\omega)\mathbf{B}^T (\mathbf{B}\mathbf{Y}(\omega)\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B} \right] \mathbf{Y}(\omega). \quad (4)$$

Enačba (4), znana kot enačba LM FBS (*Lagrange Multiplier FBS*), omogoča tako sklapanje kot tudi odklapanje podstruktur, pri čemer slednje izvedemo z uporabo negativno predznačene admitance podstrukture, ki jo želimo odstraniti iz sklopljenega sistema [2].

3 Hibridno modeliranje komponent

Hibridni model komponente dobimo z metodo mešanja ekvivalentnih modelov (ang. *System Equivalent Model Mixing*; SEMM) [3], ki z enačbo LM FBS (4) združi eksperimentalni in numerični model. Metoda predpostavi glavni model (običajno numerični, ki določa prostostne stopnje hibridnega modela), prekrivni model (običajno eksperimentalni z manjšim številom merjenih točk, ki na skupnih prostostnih stopnjah vsili svoje dinamske lastnosti) in odstranjeni model, del glavnega modela, ki ga nadomestimo s prekrivnim (slika 1).

Hibridni model dobimo tako, da glavni model sklopimo s prekrivnim, hkrati pa odklopimo odstranjeni model; postopek izvedemo v enem koraku z enačbo (4), kjer nesklapljeno admitančno matriko sestavimo iz admitanc glavnega ($\mathbf{Y}^{(\text{par})}$) in prekrivnega ($\mathbf{Y}^{(\text{ov})}$) modela ter negativno predznačene admitance odstranjenega modela ($-\mathbf{Y}^{(\text{rem})}$), Boolovo matriko $\mathbf{B}$ pa določimo tako, da poveže prostostne stopnje vseh treh modelov. Tako dobljeni hibridni model $\mathbf{Y}^{(\text{SEMM})}$ ohranja dinamske lastnosti eksperimentalnega modela in prostorsko gostoto numeričnega modela, kar je ključno za natančen popis kontakta s sosednjimi strukturami.



Slika 1: Metoda mešanja ekvivalentnih modelov.

Ker hibridni model podstrukture na kontaktu pogosto zajema le translacijske prostostne stopnje, modeli spojev pa tudi rotacijske (poglavje 4), je za sklapljanje potrebna transformacija v virtualno točko (ang. *Virtual Point Transformation*; VPT) [5], ki pomike in sile sosednjih merilnih točk v bližini kontakta projicira v virtualno točko s šestimi prostostnimi stopnjami (trema translacijskimi in tremi rotacijskimi) ter tako zagotovi soležnost prostostnih stopenj hibridnega modela in modela spoja.

4 Model spoja in simulacija poškodb

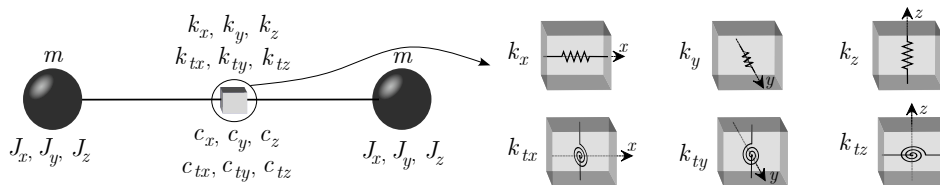
Spoj med sosednjima podstrukturama modeliramo kot dve masni točki, povezani preko medsebojnih togostnih in dušilnih lastnosti v šestih smereh (tri translacije in tri rotacije). Razultat je model spoja z 12 prostostnimi stopnjami (slika 2). Masno $\mathbf{M}^{(J)}$, dušilno $\mathbf{C}^{(J)}$ in togostno matriko $\mathbf{K}^{(J)}$ spoja zapišemo kot:

$$\mathbf{M}^{(J)} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{(J)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(J)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{K} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

kjer je $\mathbf{M} = \text{diag}(m, m, m, J_x, J_y, J_z)$ diagonalna masna matrika posamezne masne točke, $\mathbf{C}$ in $\mathbf{K}$ pa vsebujeta po tri translacijske in tri rotacijske koeficiente dušenja oz. togosti. Admitančno matriko spoja $\mathbf{Y}^{(J)}(\omega)$ nato izračunamo kot:

$$\mathbf{Y}^{(J)}(\omega) = \left[-\omega^2 \mathbf{M}^{(J)} + i\omega \mathbf{C}^{(J)} + \mathbf{K}^{(J)} \right]^{-1}. \quad (6)$$

Parametre nepoškodovanega spoja določimo tako, da se odziv sklopljenega modela čim bolj ujema z izmerjenim odzivom konstrukcije (npr. z ujemanjem modalnih parametrov ali koherenco med frekvenčnima prenosnima funkcijama). Maso in dimenzije spoja privzamemo za zanemarljive, zato je treba identificirati le dušilne in togostne parametre. Parametre je mogoče določiti ročno ali z uporabo optimizacijskih orodij (npr. gradientno optimizacijo, genetskimi algoritmi ali Bayesovsko identifikacijo) in ciljno funkcijo, ki ovrednoti odstopanje med simuliranim in izmerjenim odzivom, kar olajša in pospeši identifikacijo. Ustrezna izbira togostnih parametrov je za tvorbo učne množice ključna, saj neustrezna izbira pomeni napačno referenčno stanje in lahko povzroči prezgodnjo ali, kar je bolj kritično, prepozno oz. zgrešeno detekcijo poškodbe. Občutljivost rezultatov od izbire parametrov je odvisna od opazovane konstrukcije, natančneje od tega kako sprememba togosti vpliva na dinamski odziv.



Slika 2: Model spoja: dve masni točki, povezani preko medsebojnih togostnih in dušilnih lastnosti v treh translacijskih in treh rotacijskih smereh.

Poškodovanost spoja simuliramo s padcem togosti glede na nepoškodovano stanje. Če predpostavimo, da se togost spoja v vseh smereh spremeni enako, lahko togostno matriko poškodovanega spoja $\mathbf{K}_{\text{dmg}}$ zapišemo z enim samim faktorjem poškodovanosti $\beta \in [0, 1]$:

$$\mathbf{K}_{\text{dmg}} = (1 - \beta)\mathbf{K}_0, \quad (7)$$

kjer je $\mathbf{K}_0$ togostna matrika nepoškodovanega spoja, $\beta = 0$ predstavlja nepoškodovano stanje in $\beta = 1$ najvišjo stopnjo poškodovanosti. S spreminjanjem β na poljubnem spoju generiramo poljubno veliko modelov različno poškodovanih spojev, ki jih sklopimo s (fiksni) hibridnimi modeli podstruktur in tako tvorimo vzorce učne množice.

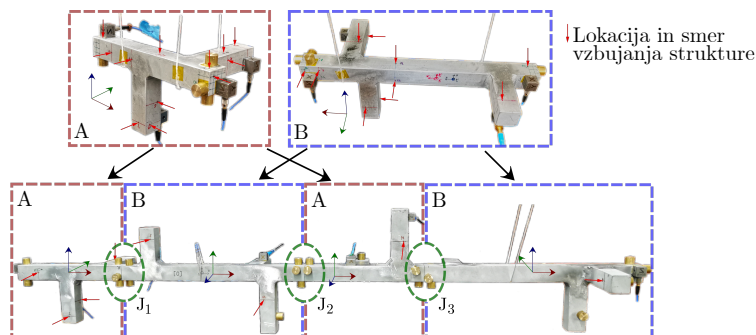
Računska učinkovitost izhaja iz tega, da je najzahtevnejše korake (meritve, izdelavo numeričnih modelov in sklapljanje po metodi SEMM) treba izvesti le enkrat, za tvorbo hibridnih modelov podstruktur, ki nato za celotno učno množico ostanejo nespremenjeni. Med vzorci se spreminjajo le majhne matrike modelov spojev, njihovo sklapljanje s fiksnimi hibridnimi modeli pa zahteva le inverz razmeroma majhne kontaktne matrike $\mathbf{B}\mathbf{Y}(\omega)\mathbf{B}^T$, ne glede na prostorsko gostoto hibridnih modelov. Klasičen pristop bi nasprotno za vsako stanje zahteval spremembo in ponovno rešitev modela končnih elementov celotne konstrukcije, kar je bistveno bolj zahtevno.

5 Eksperimentalna verifikacija

5.1 Eksperimentalna struktura in tvorba podatkov

Predstavljena metodologija je bila preizkušena na laboratorijski konstrukciji, sestavljeni iz štirih podstruktur oblik A in B (vsaka oblika se pojavi dvakrat), povezanih preko treh spojev J_1 , J_2 in J_3 (slika 3). Eksperimentalna modela podstruktur A in B sta bila pridobljena z udarnim kladivom (vzbujanje v 19 oz. 18 točkah) in triosnimi pospeškomeri (odziv v 11 točkah) pri prostih

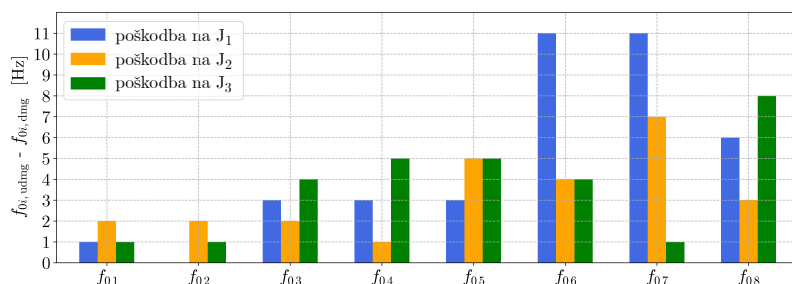
robnih pogojih. Zaradi omejenega števila senzorjev so bile meritve izvedene po metodi premikajočih se senzorjev, pri čemer so bile na mesta brez pospeškomerov pritrjene nadomestne mase, ki so ohranjale masno porazdelitev konstrukcije. Vzporedno izdelana numerična modela obeh podstruktur sta bila z ustreznima eksperimentalnima združena v hibridna modela po metodi SEMM.



Slika 3: Eksperimentalna konstrukcija, sestavljena iz podstruktur A in B (vsaka se pojavi dva-krat), povezanih prek spojev J_1 , J_2 in J_3 .

Zaradi razmeroma preprostega obravnavanega primera (majhno število spojev in parametrov) so bili parametri nepoškodovanih spojev določeni ročno, tako da se je odziv sklopljenega modela ujemal z izmerjenim odzivom cele konstrukcije. Elementom dušilne matrike $\mathbf{C}$ je bila dodeljena vrednost 0.003, translacijskim elementom togostne matrike $\mathbf{K}$ vrednost 8×10^{12} N/m in rotacijskim elementom vrednost 8×10^{10} N m/rad. Poškodovanost posameznega spoja je bila nato razdeljena v pet razredov po 10 % padca togosti (od 0 do 50 %), kar je skupaj s tremi možnimi lokacijami poškodbe in razredom za nepoškodovano stanje dalo 16 možnih stanj konstrukcije. S sklapljanjem hibridnih modelov podstruktur z modeli spojev je bilo tvorjenih 10.008 vzorcev, enakomerno porazdeljenih med vsemi 16 stanji.

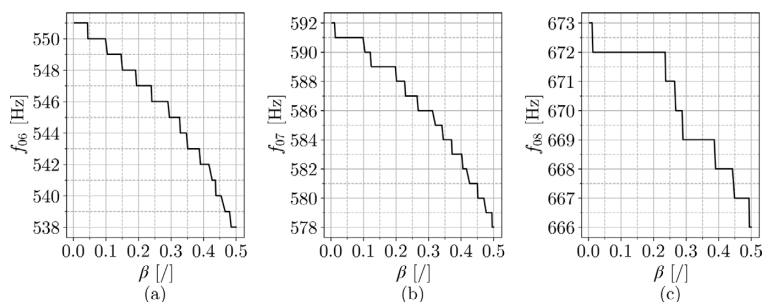
Vpliv lokacije poškodbe na dinamski odziv konstrukcije je prikazan na sliki 4, kjer je za posamezno lokacijo poškodovanega spoja ($\beta = 0.45$) prikazan padec prvih osmih lastnih frekvenc glede na nepoškodovano stanje. Razvidno je, da se ta padec spreminja glede na to, kateri spoj je poškodovan, torej lastne frekvence nosijo informacije o lokaciji poškodbe.



Slika 4: Padec lastnih frekvenc f_{0i} glede na nepoškodovano stanje pri poškodbi ($\beta = 0.45$) na spoju J_1 , J_2 oz. J_3 .

Poleg lokacije poškodbe je za zanesljivo diagnostiko pomembna tudi odvisnost padca lastnih

frekvenc od velikosti faktorja poškodovanosti β . Slika 5 prikazuje spreminjanje šeste, sedme in osme lastne frekvence pri naraščajočem faktorju poškodovanosti $\beta \in [0, 0.5]$ na spoju J_1 . Padec lastnih frekvenc z naraščanjem β ni linearen, temveč se z večanjem poškodovanosti pospešuje. Pri nizkih vrednostih β je padec posameznih lastnih frekvenc majhen (tudi manj kot 1 Hz), kar je glede na frekvenčno ločljivost meritve pogosto premajhno za zanesljivo zaznavanje majhnih poškodb. To pojasnjuje tudi zmanjšano zanesljivost napovedi pri nizkih vrednostih β , opisano v nadaljevanju.



Slika 5: Vpliv faktorja poškodovanosti β na (a) šesto, (b) sedmo in (c) osmo lastno frekvenco strukture pri poškodbi na spoju J_1 .

5.2 Priprava značilnik in učenje modela SVM

Vsak vzorec je vseboval 6900 frekvenčnih prenosnih funkcij (FPF) med notranjimi prostostnimi stopnjami hibridnih modelov, kar je bilo za učinkovito učenje modela preveč. Za zmanjšanje dimenzionalnosti je bilo izbranih pet FPF z jasnimi resonančnimi vrhovi, frekvenčno območje pa omejeno na 360–700 Hz, kjer so lastne frekvence najbolj občutljive na poškodbe. Nato je bila z metodo analize glavnih komponent (ang. *principal component analysis*; PCA) od 1700 razpoložljivih komponent obdržanih prvih 40; kompleksne vrednosti so bile ločene na realni in imaginarni del, kar je dalo 80 značilnik na vzorec.

Tako pripravljena učna množica je bila uporabljena za učenje modela podpornih vektorjev (*Support Vector Machine*, SVM) [1]. SVM je bil izbran za hitro demonstracijo postopka identifikacije poškodb na podlagi tvorjene učne množice. Čeprav ni nujno najprimernejši, najnaprednejši ali najkompleksnejši model za obravnavano nalogo, omogoča dobro posploševanje pri omejenem številu učnih vzorcev in visoko uspešnost pri visokodimenzionalnih podatkih. Za demonstracijo bi bilo mogoče uporabiti tudi druge modele strojnega učenja, vendar je SVM na obravnavani učni množici dosegel zadovoljive rezultate, zato njihovo preizkušanje ni bilo potrebno. Z uporabo polinomskega jedra šeste stopnje in 10-kratne križne validacije je bila dosežena povprečna vrednost mere $F1 = 1.0$, kar pomeni popolno klasifikacijo testnih vzorcev znotraj tvorjene učne množice.

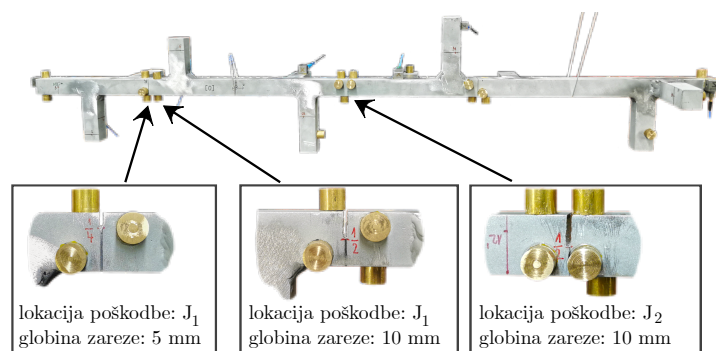
5.3 Testiranje na numeričnih in eksperimentalnih podatkih

Trenirani SVM model je bil testiran na 11 numeričnih modelih z znano lokacijo in stopnjo poškodbe, izdelanih neodvisno od učne množice. Model je pravilno določil lokacijo poškodbe za primere z višjo stopnjo poškodovanosti, medtem ko je pri nizkih vrednostih β ($\leq 25\%$)

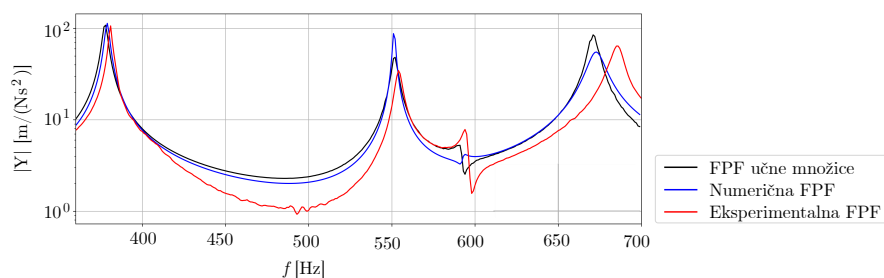
pogosto napovedal napačno lokacijo, kar izhaja iz premajhne spremembe lastnih frekvenc glede na frekvenčno ločljivost 1 Hz.

Kakovostne meritve so ključne za uspešno uporabo metod dinamskega sklapljanja: neustrezne meritve (npr. prevelik šum, napake pri kalibraciji) lahko privedejo do neuspešnega sklapljanja oz. odklapljanja in nereprezentativnih dinamskih odzivov, s čimer učna množica ne predstavlja veljavnih vzorcev. Frekvenčna ločljivost ne vpliva na sklapljanje, saj se izvede neodvisno na vsaki frekvenčni liniji, a omejuje zaznavnost majhnih premikov lastnih frekvenc, pomembnih za identifikacijo manjših poškodb, kot je razvidno zgoraj. Podobno lahko na zanesljivost klasifikacije vpliva tudi ponovljivost meritev (npr. lokacija udarca s kladivom, namestitev senzorjev), ki med vzorci vnese dodatno variabilnost odziva, kar velja upoštevati tudi pri nadaljnjem, eksperimentalnem testiranju.

Nadaljnje testiranje je bilo izvedeno na štirih fizičnih vzorcih konstrukcije z vrezano poškodbo na spoju J_1 oz. J_2 (slika 6). Neposredna uporaba modela na eksperimentalnih podatkih je dala nezadovoljive rezultate, saj so se lege resonančnih vrhov izmerjenega odziva nekoliko razlikovale od tistih v učni množici (slika 7). Te razlike izhajajo predvsem iz razlik med numeričnimi modeli posameznih komponent (modeliranih kot en kos) in dejansko zvarjeno konstrukcijo.



Slika 6: Poškodbe na eksperimentalnih vzorcih.



Slika 7: Primerjava frekvenčne prenosne funkcije vzorca iz učne množice z numerično in eksperimentalno pridobljeno frekvenčno prenosno funkcijo neposkodovane konstrukcije.

Za omilitev teh odstopanj smo na lastnih frekvencah v območju 360–700 Hz (namesto na celih FPF), ki so manj občutljive na eksperimentalne pogreške, trenirali nov SVM model (linearno jedro, $C = 1$). Nov model je pri križni validaciji dosegel vrednost $F_1 = 0.883$. Rezultati napo-

vedi na štirih eksperimentalnih vzorcih so prikazani v preglednici 1. Model je pravilno prepoznal nepoškodovano stanje ter lokacijo poškodbe pri obeh globlje vrezanih vzorcih, medtem ko plitke zareze (manjša poškodba) ni zaznal.

Tabela 1: Napoved lokacije in obsega poškodbe na eksperimentalnih vzorcih z modelom SVM.

Vzorec	Lokacija (ref.)	Globina reza [mm]	Lokacija (napoved)	Razred β [%]
1	/	0	/	0
2	J ₁	5	/	0
3	J ₁	10	J ₁	40–50
4	J ₂	10	J ₂	20–30

6 Zaključek

V prispevku je bil predstavljen hibridni, eksperimentalno-numerični pristop za tvorbo učne množice za strojno učenje, namenjen diagnostiki poškodovanosti spojev v sestavljenih konstrukcijah. S kombinacijo dinamskega podstrukturiranja, metode SEMM in analitičnih modelov spojev je bilo iz razmeroma majhnega eksperimentalnega vložka mogoče tvoriti obsežno in raznoliko učno množico. Na laboratorijski konstrukciji je bil naučen klasifikator SVM, ki je uspešno določal lokacijo in stopnjo poškodovanosti na numeričnih podatkih, po prilagoditvi izbire značilk (lastne frekvence namesto celotnih frekvenčnih prenosnih funkcij) pa tudi na eksperimentalnih, še posebej pri višjih stopnjah poškodovanosti.

Glavna omejitev pristopa je opredelitev nepoškodovanega stanja, saj lahko negotovosti materialnih lastnosti in proizvodnega procesa povzročijo odstopanja med nominalno enakimi nepoškodovanimi konstrukcijami; pristop tudi ne upošteva vpliva spremenljivih okoljskih in obratovalnih razmer na dinamski odziv. Prenosljivost na kompleksnejše konstrukcije po drugi strani ni omejena s kompleksnostjo komponent, dokler je na njih mogoče izvesti meritve za tvorbo hibridnih modelov po SEMM. Oviro pri kompleksnejših realnih spojih lahko predstavljajo popis kontaktnih pogojev, identifikacija lastnosti spojev ter nelinearni pojavi (trenje, zračnost), ki jih linearni model ne zajame. Vse to odpira možnosti za nadaljnji razvoj predlagane metodologije.

- [1] B. E. Boser, I. M. Guyon, and V. N. Vapnik. A training algorithm for optimal margin classifiers. In *Proceedings of the Fifth Annual Workshop on Computational Learning Theory*, pages 144–152, 1992.
- [2] D. de Klerk, D. J. Rixen, and S. N. Voormeeren. General framework for dynamic substructuring: History, review and classification of techniques. *AIAA Journal*, 46(5):1169–1181, 2008.
- [3] S. W. B. Klaassen, M. V. Van der Seijs, and D. de Klerk. System equivalent model mixing. *Mech. Syst. Signal Process.*, 105:90–112, 2017.
- [4] T. G. Ritto and F. A. Rochinha. Digital twin, physics-based model, and machine learning applied to damage detection in structures. *Mech. Syst. Signal Process.*, 155:107614, 2021.
- [5] M. V. Van der Seijs. *Experimental Dynamic Substructuring: Analysis and design strategies for vehicle development*. PhD thesis, Delft University of Technology, 2016.

Eksperimentalna analiza vpliva temperature na odpornost medicinskih katetrov proti prepogibanju in lokalni izgubi stabilnosti

David Fijavž¹, Žiga Žnidarič², Srečko Glodež³ in Branko Nečemer⁴

Experimental Analysis of the Effect of Temperature on the Kink Resistance and Local Stability of Medical Catheters

Povzetek. V prispevku je predstavljena eksperimentalna analiza odpornosti medicinskih katetrov proti prepogibanju pri sobni temperaturi (22 °C) in temperaturi, ki predstavlja pogoje realne uporabe v stiku s človeškim telesom (37 °C). Preskusi so bili izvedeni po smernicah standarda SIST EN 13868:2002 na elektrodinamičnem preskusnem stroju Zwick/Roell LTM 3 z uporabo posebej izdelane vpenjalne priprave. Analizirani so bili štirje tipi medicinskih katetrov različnih dimenzij. Na podlagi diagramov sila–pomik so bile določene kritične sile in pomiki pri pojavu lokalnega prepogiba oziroma kolapsa lumna. Rezultati kažejo, da povišana temperatura pomembno zmanjša togost materiala in posledično silo, potrebno za nastanek prepogiba, medtem ko katetri večjih dimenzij izkazujejo večjo odpornost proti lokalni izgubi stabilnosti. Pridobljeni rezultati predstavljajo pomembno osnovo za vrednotenje mehanske varnosti medicinskih katetrov.

Abstract. The paper presents an experimental investigation of the kink resistance of medical catheters tested at room temperature (22 °C) and body temperature (37 °C). The experiments were carried out in accordance with the SIST EN 13868:2002 standard using a Zwick/Roell LTM 3 electrodynamic testing machine equipped with a specially designed fixture. Four endotracheal catheter sizes were analysed. Force–displacement curves were used to determine the critical force and displacement corresponding to the onset of local buckling and lumen collapse. The results demonstrate that elevated temperature significantly reduces the stiffness of the catheter material and lowers the critical buckling force, while larger catheters exhibit greater resistance to local instability. These results provide valuable data for evaluating the mechanical performance and safety of medical catheters.

1 Uvod

Medicinski katetri in endotrahealne cevke predstavljajo nepogrešljiv del sodobne zdravstvene oskrbe, saj omogočajo vzdrževanje prehodnosti dihalnih poti, dovajanje zdravil, tekočin ali drugih medicinskih sredstev ter izvajanje številnih diagnostičnih in terapevtskih postopkov[1], [2]. Njihova zanesljivost in varnost sta ključnega pomena za uspešno zdravljenje pacientov, zato morajo poleg biološke ustreznosti izpolnjevati tudi stroge mehanske zahteve. Med pomembnejšimi mehanskimi lastnostmi medicinskih katetrov so zadostna upogibna togost, fleksibilnost, odpornost proti utrujanju materiala ter predvsem odpornost proti prepogibanju (angl. kink resistance), ki pomembno vpliva na njihovo

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

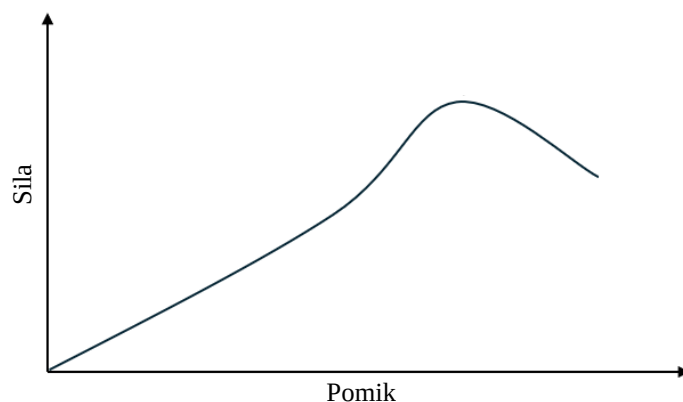
³ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

⁴ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

funkcionalnost med uporabo [3], [4]. Med klinično uporabo so katetri pogosto izpostavljeni kombinaciji upogibnih, tlačnih in nateznih obremenitev. Do teh prihaja zaradi anatomskih posebnosti bolnika, premikanja pacienta, manipulacije zdravstvenega osebja ali zaradi dolgotrajne uporabe medicinskega pripomočka. Če lokalna obremenitev preseže kritično vrednost, lahko pride do lokalne izgube stabilnosti oziroma prepogiba stene katetra [5]. Posledica prepogiba je zmanjšanje notranjega prereza katetra oziroma lumna, kar lahko bistveno zmanjša ali popolnoma prekine pretok zraka oziroma tekočine. Pri endotrahealnih cevkah lahko takšna deformacija povzroči povečanje dihalnega upora, nezadostno ventilacijo pacienta ali celo popolno zaporo dihalne poti, kar predstavlja resno tveganje za varnost bolnika.

Odpornost proti prepogibanju je odvisna od več dejavnikov, med katerimi imajo najpomembnejšo vlogo geometrijske značilnosti katetra (zunani in notranji premer ter debelina stene), uporabljeni material in njegove mehanske lastnosti. Večina sodobnih medicinskih katetrov je izdelana iz polimernih materialov, kot so poliuretan, silikon ali polivinilklorid (PVC), katerih mehanske lastnosti so izrazito odvisne od temperature [2, 3]. Pri temperaturi človeškega telesa se zaradi zmanjšanja modula elastičnosti poveča prožnost materiala, hkrati pa se zmanjša njegova togost in odpornost proti lokalni izgubi stabilnosti. Zato rezultati preskusov, izvedenih zgolj pri sobni temperaturi, ne odražajo vedno dejanskega mehanskega obnašanja katetrov med klinično uporabo.

Preskušanje odpornosti katetrov proti prepogibanju je opredeljeno v standardu SIST EN 13868:2002 Katetri – Preskusne metode za določanje pregibanja katetrov in cevk z enojno svetlino, ki določa postopek ugotavljanja lokalnega kolapsa medicinskih cevk pri tlačni obremenitvi [6]. Standard temelji na spremljanju odvisnosti sile od pomika med postopnim približevanjem vpenjal, pri čemer se iz diagrama sila–pomik določi kritična sila, ki označuje začetek lokalnega prepogiba oziroma kolapsa lumna (Slika 1). Takšen pristop omogoča objektivno primerjavo mehanskega odziva katetrov različnih dimenzij, konstrukcijskih izvedb in materialov ter predstavlja pomembno osnovo za vrednotenje njihove kakovosti in varnosti.



Slika 1: Potek sile pri testiranju katetrov na odpornost proti pregibu

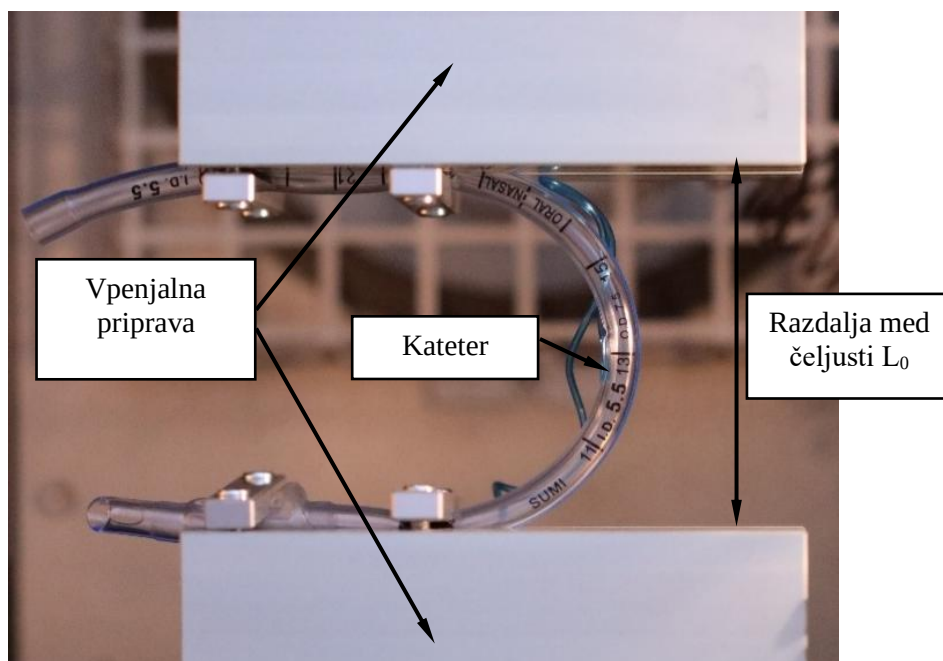
Namen predstavljenega raziskovalnega dela je eksperimentalno ovrednotiti vpliv temperature na odpornost endotrahealnih katetrov proti prepogibanju. V prispevku je predstavljena eksperimentalna analiza štirih tipov endotrahealnih katetrov različnih dimenzij in proizvajalcev pri sobni temperaturi (22 °C) ter temperaturi človeškega telesa (37 °C), ki

predstavlja pogoje njihove dejanske uporabe. Preskusi so bili izvedeni na elektrodinamičnem preskusnem stroju Zwick/Roell LTM 3 z uporabo posebej izdelane vpenjalne priprave, medtem ko je bilo testiranje pri povišani temperaturi izvedeno v temperaturni komori istega proizvajalca, ki omogoča temperaturno območje od $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $+250\text{ }^{\circ}\text{C}$. Na podlagi eksperimentalno določenih diagramov sila–pomik so bile določene kritične sile in pripadajoči pomiki pri nastanku lokalnega prepogiba oziroma kolapsa lumna. Dobljeni rezultati omogočajo primerjavo mehanskega odziva katetrov različnih dimenzij ter oceno vpliva temperature na njihovo mehansko stabilnost in odpornost proti prepogibanju.

2 Izvedba preizkusov

Za štiri vrste medicinskih katetrov so bili izvedeni tlačni preskusi z namenom določanja odpornosti proti prepogibanju oziroma kolapsu lumna. Na osnovi dobljenih eksperimentalnih rezultatov (diagram sila – pomik) je bila določena kritična točka, pri kateri pride do porušitve nosilnosti prereza katetra in posledično zmanjšanja notranjega preseka (lumna). Preskusi so bili izvedeni pri sobni temperaturi ($22\text{ }^{\circ}\text{C}$) in povišani temperaturi ($37\text{ }^{\circ}\text{C}$).

Za potrebe izvedbe preskusov je bila izdelana posebna vpenjalna priprava, ki je omogočala ustrezno vpetje katetrov v čeljusti preizkuševališča, kot prikazuje slika 2. Med tlačnim obremenjevanjem se je beležila sila ter pomik, potrebna za deformacija katetra. Testi so bili izvedeni s hitrostjo pomika 40 mm/min . V skladu s standardom je pri določeni stopnji deformacije pričakovati padec sile, ki nastopi zaradi lokalnega kolapsa katetra in zmanjšanja prereza lumna.



Slika 2: Priprava za testiranje katetrov v toplotni komori

Razdalja med čeljustmi L_0 je s standardom SIST EN 13868:2002 predpisovala vsaj dvakratnik razdalje, pri kateri pričakujemo popolni pregib katetre [6]. Tako smo na podlagi prve testne izvedbe določili približno razdaljo med čeljustmi, ki je variirala glede na posamezni premer cevke (pri večjih cevkah smo uporabili večjo razdaljo). Posamezni podatki katetrov so navedeni v preglednici 1. Skupno je bilo preizkušenih osem vzorcev, saj je bila vsaka izmed štirih dimenzij endotrahealnega katetra preskušena pri dveh različnih temperaturah (22 °C in 37 °C), zato sta bila za vsako dimenzijo uporabljena po dva primerka. V preglednici so podane tudi osnovne dimenzijske značilnosti posameznega katetra, vključno z notranjim premerom (ID), zunanjim premerom (OD) in dolžino katetra.

Preglednica 1: Oznake in podatki testiranih katetrov

Oznaka vzorca	Notranji premer ID [mm]	Zunanji premer OD [mm]	Razdalja med čeljusti L_0 [mm]	Temperatura [°C]
V_I=3,5mm_O=4,8mm_L0=50mm	3,5	4,8	50	22
V_I=4mm_O=5,5mm_L0=60mm	4,0	5,5	60	22
V_I=4,5mm_O=6,2mm_L0=60mm	4,5	6,2	60	22
V_I=5,5mm_O=7,5mm_L0=73mm	5,5	7,5	73	22
T_I=3,5mm_O=4,8mm_L0=50mm	3,5	4,8	50	37
T_I=4mm_O=5,5mm_L0=60mm	4,0	5,5	60	37
T_I=4,5mm_O=6,2mm_L0=60mm	4,5	6,2	60	37
T_I=5,5mm_O=7,5mm_L0=73mm	5,5	7,5	73	37

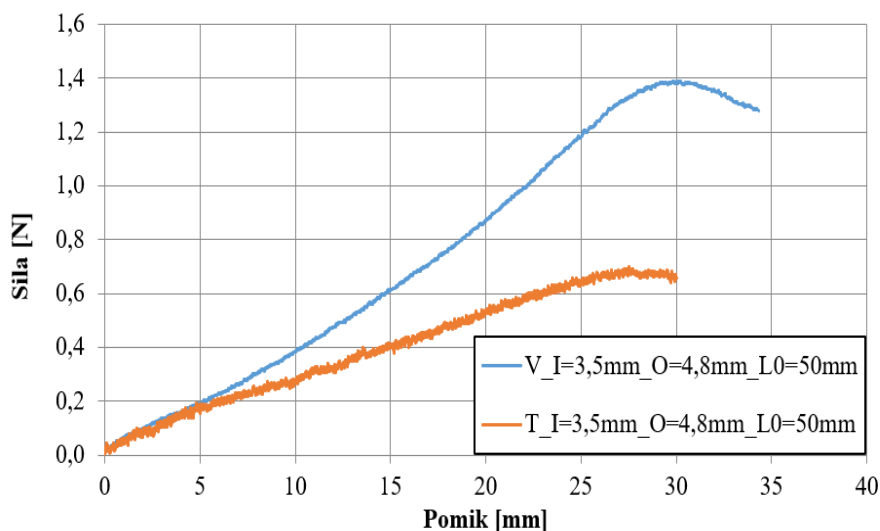
3 Rezultati tlačnih testov

Na slikah 3 do 6 so prikazani diagrami sila-pomik za analizirane medicinske katetre različnih dimenzij pri sobni (22 °C) in povišani (37 °C) temperaturi. Na osnovi eksperimentalnih rezultatov je bila določena sila prevoja oziroma kritična sila, pri kateri pride do lokalnega kolapsa katetra in posledično zmanjšanja lumna. V preglednici 2 so povzete izmerjene vrednosti sile prevoja in pripadajočega pomika prevoja za posamezne preizkušance.

Preglednica 2: Rezultati testov pregiba katetrov

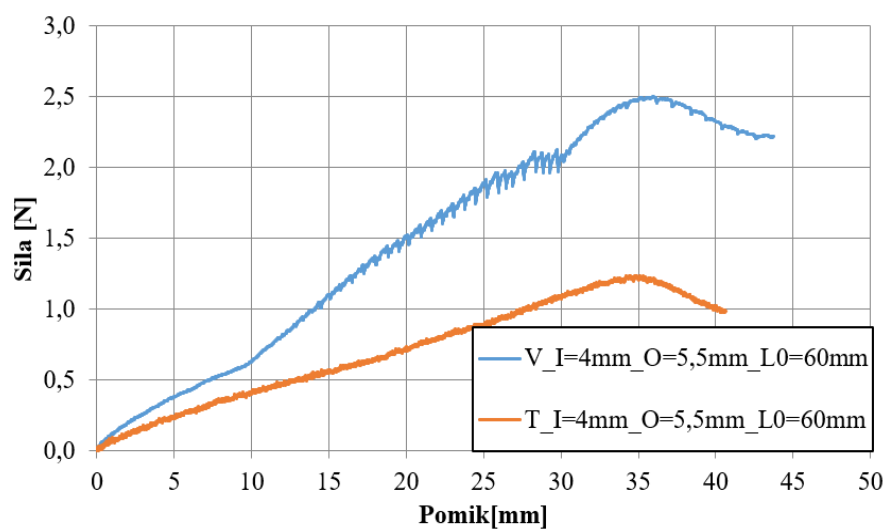
Oznaka vzorca	Sila prevoja [N]	Pomik prevoja [mm]	Temperatura [°C]
V_I=3,5mm_O=4,8mm_L0=50mm	1,39	29,8	22
T_I=3,5mm_O=4,8mm_L0=50mm	0,69	27,5	37
V_I=4mm_O=5,5mm_L0=60mm	2,50	36,1	22
T_I=4mm_O=5,5mm_L0=60mm	1,23	34,4	37
V_I=4,5mm_O=6,2mm_L0=60mm	1,34	34,5	22
T_I=4,5mm_O=6,2mm_L0=60mm	0,62	29,6	37
V_I=5,5mm_O=7,5mm_L0=73mm	4,01	42,9	22
T_I=5,5mm_O=7,5mm_L0=73mm	2,30	33,4	37

Na sliki 3 je prikazan diagram sila-pomik za katetre dimenzije ID = 3,5 mm pri temperaturah 22 °C in 37 °C. Pri obeh preskusih je opazno postopno naraščanje sile z večanjem pomika do dosežene kritične točke prevoja. Po doseženi maksimalni sili pride do zmanjšanja nosilnosti, kar je posledica lokalnega kolapsa katetra in zmanjšanje prereza lumna. Primerjava pokaže, da je pri povišani temperaturi potrebna bistveno manjša sila za doseg prevoja katetra. Sila se pri temperaturi 37 °C zmanjša iz 1,39 N na 0,69 N, kar predstavlja nekaj manj kot 50% zmanjšanje nosilnosti.

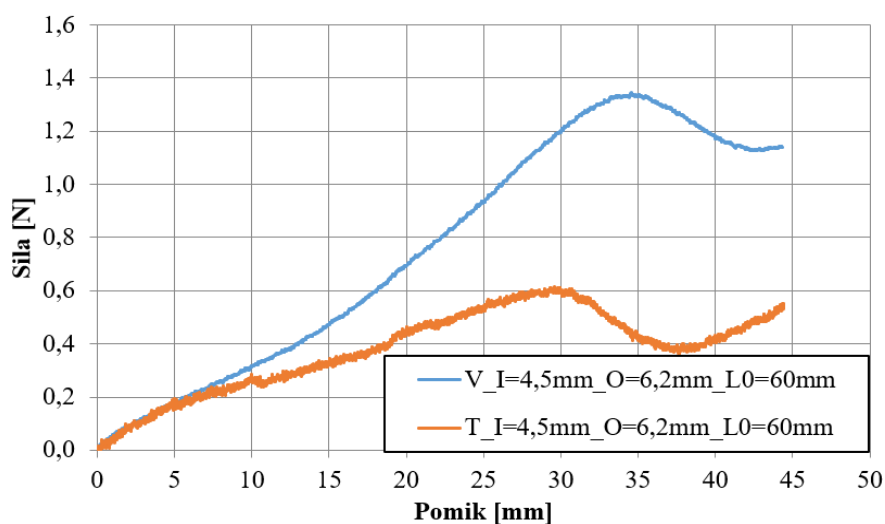


Slika 3: Grafa sila-pomik za katetre notranjega premera 3,5 mm

Na sliki 4 je prikazan odziv katetrov dimenzije ID = 4,0 mm. Tudi pri tej dimenziji je opazno zmanjšanje sile prevoja pri povišani temperaturi. Pri sobni temperaturi je bila izmerjena sila prevoja 2,5 N, medtem ko je pri temperaturi 37 °C znašala 1,23 N. Podobno obnašanje je bilo ugotovljeno tudi pri katetrih dimenzije ID = 4,5 mm, prikazano na sliki 5. Pri povišani temperaturi pride do zmanjšanja togosti materiala in posledično nižje kritične sile prevoja iz 1,34 N na 0,61 N.

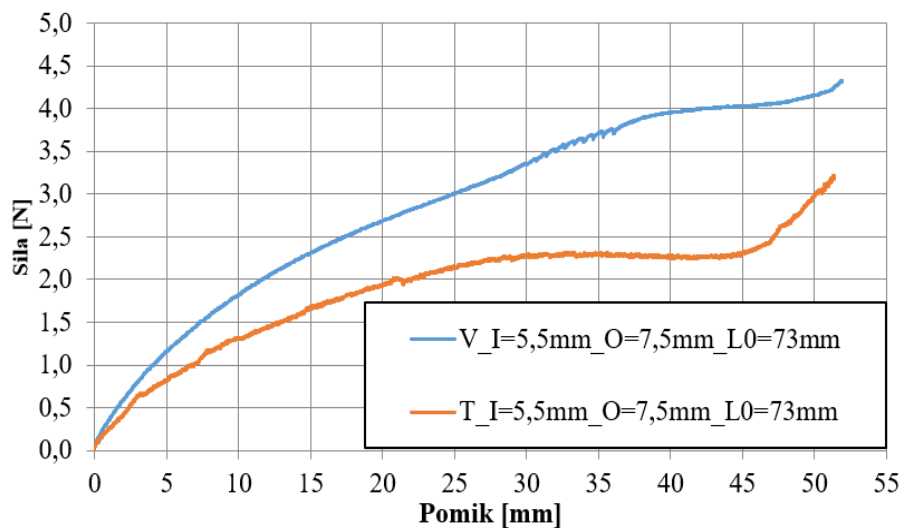


Slika 4: Grafa sila-pomik za katetre notranjega premera 4 mm



Slika 5: Grafa sila-pomik za katetre notranjega premera 4,5 mm

Največjo odpornost proti prepogibanju sta pokazala katetra dimenzije ID = 5,5 mm, katerega rezultati so prikazani na sliki 6. Pri sobni temperaturi je bila dosežena največja sila prevoja 4,01 N. Tudi pri tem katetru je bilo pri povišani temperaturi opazno zmanjšanje nosilnosti, vendar je kljub temu ohranil najvišjo odpornost proti kolapsu med vsemi analiziranimi vzorci.



Slika 6: Grafa sila-pomik za katetre notranjega premera 5,5 mm

Na osnovi vseh izvedenih preskusov je mogoče ugotoviti, da povišana temperatura pomembno vpliva na mehanski odziv katetrov. Pri vseh analiziranih dimenzijah pride pri temperaturi 37 °C do občutnega zmanjšanja sile prevoja, kar kaže na zmanjšanje togosti materiala pri temperaturi, ki je blizu dejanskim pogojem uporabe v človeškem telesu. Poleg temperature na odpornost proti kolapsu pomembno vplivajo tudi dimenzije katetra, predvsem debelina stene, saj večji katetri izkazujejo višjo odpornost proti prepogibanju.

Na slikah 7 do 10 je prikazan potek deformacij analiziranih katetrov med tlačnim obremenjevanjem. Posnetki prikazujejo zaporedne faze deformacije od začetnega neobremenjenega stanja do doseženega lokalnega kolapsa katetra. Pri vseh analiziranih vzorcih je mogoče opaziti postopno povečanje ukrivljenosti katetra z naraščanjem pomika. Pri določeni stopnji deformacije pride do lokalne izgube stabilnosti, kar povzroči pregib stene katetra in zmanjšanje lumna. Vizualni posnetki potrjujejo rezultate diagramov sila-pomik, kjer se po doseženi maksimalni sili pojavi zmanjšanje nosilnosti. Ta pojav je povezan z lokalnim kolapsom prereza katetrov, zaradi katerega se zmanjša njihova sposobnost prenašanja nadaljnje obremenitve. Pri cevkah manjših dimenzij je opaziti hitrejši nastanek lokalnega prepogiba in izrazitejšo deformacijo prereza, medtem ko večji katetri ohranjajo stabilnejšo geometrijo in večjo odpornost proti kolapsu. Sekvence deformacije prav tako kažejo, da se kolaps konstantno pojavi v območju največje ukrivljenosti katetra, kjer nastopijo največje obremenitve.



Slika 7: Obremenjevanje vzorca $V_I=3,5\text{mm}_O=4,8\text{mm}_L0=50\text{mm}$



Slika 8: Obremenjevanje vzorca $V_I=4,5\text{mm}_O=6,2\text{mm}_L0=60\text{mm}$



Slika 9: Obremenjevanje vzorca $V_I=4\text{mm}_O=5,5\text{mm}_L0=60\text{mm}$



Slika 3: Obremenjevanje vzorca $V_I=5,5\text{mm}_O=7,5\text{mm}_L0=73\text{mm}$

4 Zaključek

V okviru eksperimentalne raziskave so bili za različne velikosti medicinskih katetrov izvedeni mehanski preskusi prepogibanja, na osnovi katerih so bili določeni diagrami sila – pomik pri različnih temperaturah (22 °C in 37 °C). Iz dobljenih eksperimentalnih rezultatov je bilo mogoče določiti kritične točke prevoja, pri katerih pride do lokalnega prepogiba katetra in posledičnega zmanjšanja lumna.

Omejitev predstavljene raziskave predstavlja omejeno število razpoložljivih vzorcev, zaradi česar statistična analiza rezultatov ni bila izvedena. Predstavljeni rezultati zato prikazujejo eksperimentalno ugotovljene trende vpliva temperature na odpornost katetrov proti prepogibanju in jih ni mogoče obravnavati kot statistično potrjene zakonitosti. Kljub temu predstavljajo pridobljeni rezultati pomembno eksperimentalno osnovo za nadaljnje raziskave z večjim številom preizkušancev.

Analizirani so bili katetri štirih različnih dimenzij in sicer z notranjimi premeri od 3,5 mm do 5,5 mm. Preskusi so bili izvedeni po vzoru zahtev standarda SIST EN 13868:2002 pri sobni temperaturi in pri temperaturi, ki predstavlja približne pogoje uporabe v človeškem telesu. Pri vseh analiziranih katetrih je bilo ugotovljeno, da se sila, potrebna za nastanek prepogiba, pri povišani temperaturi občutno zmanjša. Rezultati kažejo, da povišana temperatura vpliva na

zmanjšanje togosti materiala in posledično na nižjo odpornost katetrov proti lokalnemu kolapsu lumna.

Primerjava različnih dimenzij katetrov je pokazala, da geometrijske značilnosti pomembno vplivajo na odpornost proti prepogibanju, vendar vpliv ni monoton odvisen zgolj od notranjega oziroma zunanega premera katetra. Izmerjene kritične sile kažejo določena odstopanja med posameznimi dimenzijami, saj je kateter z notranjim premerom 4,0 mm dosegel višjo kritično silo kot kateter z notranjim premerom 4,5 mm. To nakazuje, da na mehanski odziv poleg geometrijskih značilnosti pomembno vplivajo tudi drugi dejavniki, kot so debelina stene, konstrukcijska izvedba in materialne lastnosti posameznega katetra. Ker raziskava ni bila zasnovana kot primerjava materialov oziroma proizvajalcev, teh vplivov v okviru predstavljene študije ni bilo mogoče ločeno ovrednotiti. Kljub temu je največjo odpornost proti lokalni izgubi stabilnosti izkazoval kateter z notranjim premerom 5,5 mm. Diagrami sila–pomik in vizualni posnetki deformacijskega procesa so pokazali, da se lokalni kolaps praviloma pojavi v območju največje ukrivljenosti katetra.

Rezultati izvedenih preskusov nakazujejo vpliv temperature in dimenzije katetra na njegovo odpornost proti prepogibanju. Zaradi omejenega števila razpoložljivih vzorcev predstavljajo ugotovitve eksperimentalno opažene trende, ki jih bo treba v prihodnjih raziskavah potrditi na večjem številu preizkušancev. Izvedeni preskusi omogočajo boljše razumevanje mehanskega odziva medicinskih katetrov pri obremenjevanju ter predstavljajo eksperimentalno osnovo za nadaljnje raziskave njihove mehanske stabilnosti pri uporabi.

Literatura

- [1] O. Article, *An in vitro technique to measure resistance to compression and kinking of endotracheal tubes*, 331–337, 2024.
- [2] M. S. Bhd, *Intraoperative kinking of the intraoral portion of an endotracheal tube Abnormal function of a normal ventilator*, 27, 2–3, 2011.
- [3] K. F. Busaidy, C. Seabold, *Kinked Endotracheal Tube : Possible Complication of Softening in Warm Water*, YJOMS, 69, 1329–1330, 2011.
- [4] A. J. D. Mello, J. Grischkan, J. D. Tobias, *Intraoperative endotracheal tube kinking : clinical findings and early diagnosis*, 10, 17–21, 2022.
- [5] B. Vallabhaneni, *Troubleshooting Intraoral Endotracheal Tube Kinking with a Novel Technique*, 201301, 2025.
- [6] *SIST EN 13868:2002 - Katetri - Preskusne metode za določanje pregibanja katetrov in cevok z enojno svetlino*, 2002. [Online]. Available: <https://uat-ecommerce.sist.si/catalog/standards/cen/ddaaf17a-da81-4a04-96cb-9b2474be5728/en-13868-2002>



Demonstracija postopka analize eksplozijskega vala pri avksetični zaščitni strukturi z uporabo Viper::Blast in LS-DYNA

Filip Jerenec¹, Masatoshi Nishi², Nejc Novak¹, Zoran Ren¹

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Kumamoto University, Institute of Industrial Nanomaterials

Demonstration of a blast-analysis workflow for auxetic protective structures using Viper::Blast and LS-DYNA

Povzetek. Prispevek obravnava primer obravnave obnašanja avksetične zaščitne strukture pri eksploziji vodika z uporabo sklopljene računalniške simulacije. Za opredelitev razvoja in širjenja eksplozijskega vala ter njegovega tlačnega vpliva na zaščitno strukturo je uporabljen program Viper::Blast. Zajeti časovni poteki tlačne obremenitve eksplozijskega vala na čelno površino zaščitne strukture so preneseni v program LS-DYNA, s katerim je nato izračunano dinamično deformiranje zaščitne strukture, ki na osnovi oblike deformacije, absorbirane energije ter pomika zadnje plošče zaščitne strukture služi za kvalitativno in kvantitativno oceno učinkovitosti zaščitne strukture. V tej študiji je obravnavani problem analiziran z uporabo enosmernega (šibkega) sklopljenega postopka. V nadaljevanju bo obravnava razširjena na dvosmerni (močno) sklopljeni postopek, ki bo omogočal natančnejšo vrednotenje učinkovitosti zaščitne strukture kakor tudi vpliva eksplozijskega vala na zaščiteno območje za njo.

Abstract. This contribution presents a study of the response of an auxetic protective structure subjected to a hydrogen explosion, using a coupled numerical simulation approach. The development and propagation of the blast wave, together with its pressure loading on the protective structure, are modelled using Viper::Blast. The resulting time-dependent pressure histories acting on the structure are then transferred to LS-DYNA, where the dynamic deformation of the protective system is analysed. The performance of the protective structure is evaluated both qualitatively and quantitatively, based on its deformation pattern, absorbed energy, and the displacement of the front plate. In this study, the problem is analysed using a one-way, or weakly coupled, simulation procedure. Future work will extend the approach to a two-way, or strongly coupled, procedure, enabling a more accurate assessment of the protective structure's effectiveness, as well as the influence of the blast wave on the protected region behind it.

1 Uvod

1.1 Zaščita pred eksplozijskim valom pri vodikovih sistemih

Vodikove tehnologije dobivajo vse večjo vlogo v prometu, industriji in energetiki. Pri tem ostajajo skladiščenje, prevažanje in uporaba vodika povezani z zahtevnimi obratovalnimi pogoji. Po podatkih ameriškega ministrstva za energijo se plinasti vodik običajno skladišči pri visokih tlakih, utekočinjeni vodik pa pri kriogenih temperaturah [7]. Zato možnosti nenadzorovanega izpusta in vžiga pri načrtovanju zaščitnih struktur v bližini skladiščnih ali polnilnih mest ni mogoče zanemariti.

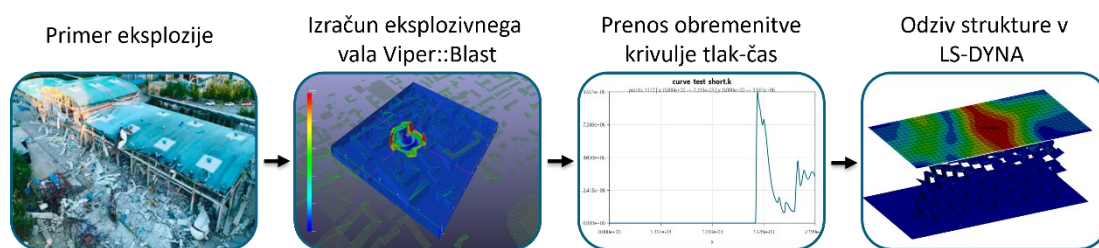
Z mehanskega vidika pri takih primerih ni pomembna le jakost eksplozije, temveč tudi način širjenja eksplozijskega vala po prostoru in vpliv bližnjih struktur na njegovo spremembo. Dolgoročni cilj obravnavanega problema je simulacija zaščitne pregrade v realnem prostorskem okolju, na primer na vodikovi polnilni postaji. V takem primeru je treba zajeti tudi okoliško geometrijo, kar omogoča natančno spremljanje razvoja eksplozijskega vala v prostoru ter prepoznavanje območij njegovih največjih obremenitev, slika 1.



Slika 1: Shematski prikaz problema zaščite pred eksplozijskim valom

Eksperimentalne raziskave struktur, obremenjenih z eksplozijskim valom, so zahtevne in drage. Zato numerična simulacija predstavlja smiselni prvi korak pri obravnavi novega konstrukcijskega koncepta ali novega primera obremenitve.

Tovrstne računalniške simulacije v osnovi zahtevajo dvosmerno (močno) sklopljeno obravnavo, pri kateri eksplozijski val vpliva na deformacijo strukture, katera posledično vpliva na spremembo eksplozijskega vala zaradi absorpcije dela njegove udarne energije kakor tudi spremembe geometrije zaščitne strukture, kar lahko bistveni vpliva na zmanjšanje impulza eksplozijskega vala v zaščitenem območju za zaščitno pregrado. Cilj raziskave je torej razviti numerični postopek za neposredno vrednotenje učinkovitosti zaščitne strukture na zmanjšanje obremenitev v varovanem območju. V prvi fazi je bil razvit in testiran enosmerno (šibko) sklopljen postopek z namenom pravilne priprave numeričnih modelov in doslednim prenosom podatkov med simulacijskimi programi, Slika 2. Za popis širjenja eksplozijskega vala po prostoru in opredelitev razporeditve njegovega tlaka na čelno površino zaščitne strukture v odvisnosti od časa je uporabljen program Viper::Blast [6]. Program LS-DYNA [1] je uporabljen za opredelitev mehanskega odziva zaščitne strukture na tovrstno obremenitev.



Slika 2: Enosmerno sklopljen postopek, uporabljen v prispevku, od referenčnega primera eksplozije do izračuna odziva strukture.

Dolgoročno je cilj postopka primerjava različnih zaščitnih geometrij pri isti eksplozijski obremenitvi ter poznejše vrednotenje njihovega vpliva na eksplozijski val za pregrado.

1.2 Avksetična celična struktura

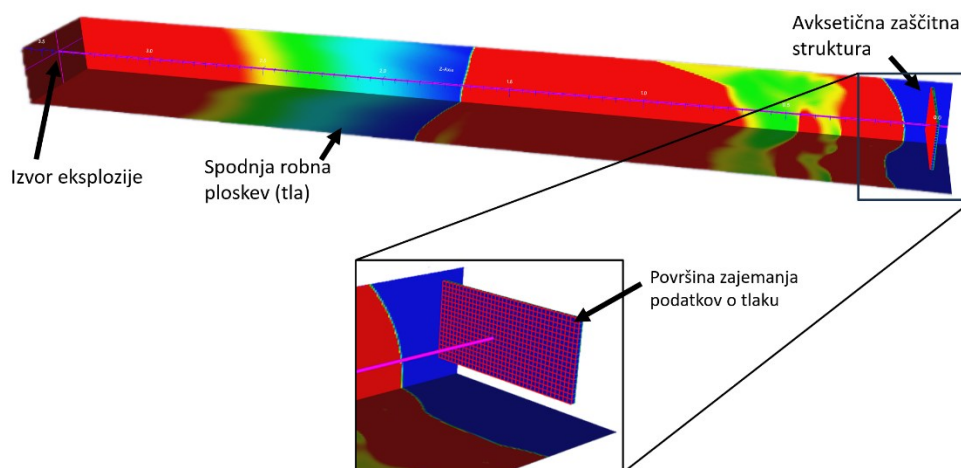
Celične strukture se pogosto uporabljajo kot sredice sendvič zaščitnih struktur z namenom zmanjšanja mase zaščitnih elementov in povečanju učinkovitosti njihove absorpcije udarne energije. Avksetične strukture so pri tem posebej zanimive, saj se med deformiranjem obnašajo bistveno drugače kot klasične celične strukture. Pri obremenitvi se v območju njenega delovanja prilagodijo smeri delovanja obremenitve tako, da se lokalno strukturno zgostijo. To prispeva k stabilnejšemu mehanizmu porušitve, izrazitejši medsebojni interakciji celic in ugodnejši absorpciji energije pri udarni in eksplozijski obremenitvi [2, 4, 5].

Zaščitne strukture se pri delovanju eksplozijskega vala izrazito elasto-plastično deformirajo in s tem s svojo deformacijo absorbirajo veliko količino udarne energije eksplozijskega vala, s čimer se bistveno zmanjša njegov učinek na zaščiteno območje za zaščitno strukturo. Ključnega pomena je torej oblikovati zaščitno strukturo tako, da je ta učinek dovolj izrazit in je v zaščitenem območju doseženo opazno zmanjšanje intenzitete eksplozijskega vala. V tem delu je analizirana zaščitna struktura z avksetično sredico, ki je že bila obravnavana v prejšnjih raziskavah, v katerih so bile numerične napovedi obnašanja strukture pod nominalnimi pogoji obremenjevanja primerjane s kvazistatičnimi in dinamičnimi eksperimentalnimi rezultati [3]. Namen tega prispevka ni ponovna validacija same zaščitne strukture, temveč prikaz njene obravnave v primeru obremenjevanja z eksplozijskim valom.

2 Prikaz numeričnega postopka

2.1 Referenčni primer eksplozije in računska domena

Model eksplozije temelji na referenčnem numeričnem primeru eksplozije vodika, povzetem iz [3]. V njem je eksplozija 30 kg vodika predstavljena s TNT ekvivalentom 6.93 kg. Simulacija razvoja, širjenja in vpliva eksplozijskega vala je izvedena v programu Viper::Blast. Uporabljena prostorska računska domena je oblike kvadra z dimenzijami $0.44\text{ m} \times 0.25\text{ m} \times 3.7\text{ m}$, in je diskretizirana s kvadratnimi celicami velikosti 0.005 m, Slika 3. Izvor eksplozije je 3.6 m oddaljen od zaščitne strukture. Spodnja robna ploskev je določena kot odbojna, preostale zunanje ploskve pa kot prepustne.



Slika 3: Računski model v programu Viper::Blast

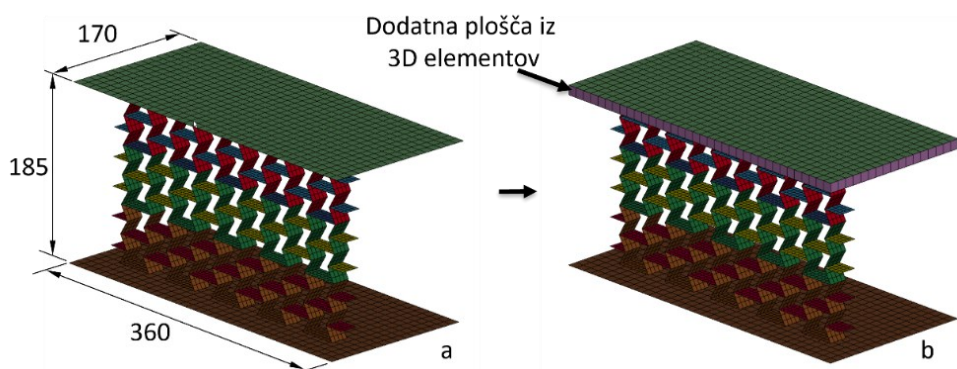
2.2 Priprava modela in enosmerni postopek prenosa obremenitve

V prvem koraku je pripravljen model zaščitne strukture v programu LS-DYNA. Sredica strukture je sestavljena iz tankostenskih aluminijastih delov iz zlitine AW-5754, razporejenih v avksetično celično topologijo. Debelina posameznih sten ni enotna, temveč je gradirana in se spreminja od debeline $t = 0.8$ mm do $t = 2.4$ mm. Na zgornji in spodnji strani sta dodani jekleni plošči debeline $t = 1.0$ mm, modelirani z lupinskimi elementi, Slika 4. Obnašanje aluminijastih delov je opisano z *MAT_PIECEWISE_LINEAR_PLASTICITY materialnim modelom. Vpliv hitrosti deformiranja upoštevan s Cowper-Symondsovo formulacijo, s parametroma $C = 6500$ in $P = 4$. Zunanji jekleni plošči sta modelirani z elastičnim materialnim modelom *MAT_ELASTIC. Stik med glavnimi deli modela je določen s standardnimi avtomatskimi kontaktnimi formulacijami programa LS-DYNA. Uporabljeni materialni podatki za zlitino AW-5754 in jekleni plošči so podani v Tabela 1.

Tabela 1: Parametri materialnih modelov

AW 5754			
Gostota	Model el.	Poissonovo št.	Definicija plastičnosti (ϵ_{pl} , σ)
[kg/m ³]	[MPa]	[-]	[-, MPa]
2660	63170	0.33	0, 172 0.04, 219 0.08, 235 0.11, 239
Jeklo			
Gostota	Model el.	Poissonovo št.	
[kg/m ³]	[MPa]	[-]	
7800	210000	0.30	

Za modeliranje zaščitne strukture v programu Viper::Blast je uporabljen le čelni del njene površine, ki je neposredno izpostavljen vplivu eksplozijskega vala. V obravnavanem primeru je to izvedeno z dodatno polno 3D ploščo, Slika 4. Plošča v sami konstrukcijski analizi nima nosilne vloge in služi zgolj za prenos eksplozijske obremenitve iz programa Viper::Blast, pri čemer si z osnovnim modelom zaščitne strukture deli vozlišča, tako da je prenesena obremenitev že v osnovi povezana s pravilnimi vozlišči v modelu LS-DYNA, Slika 3.

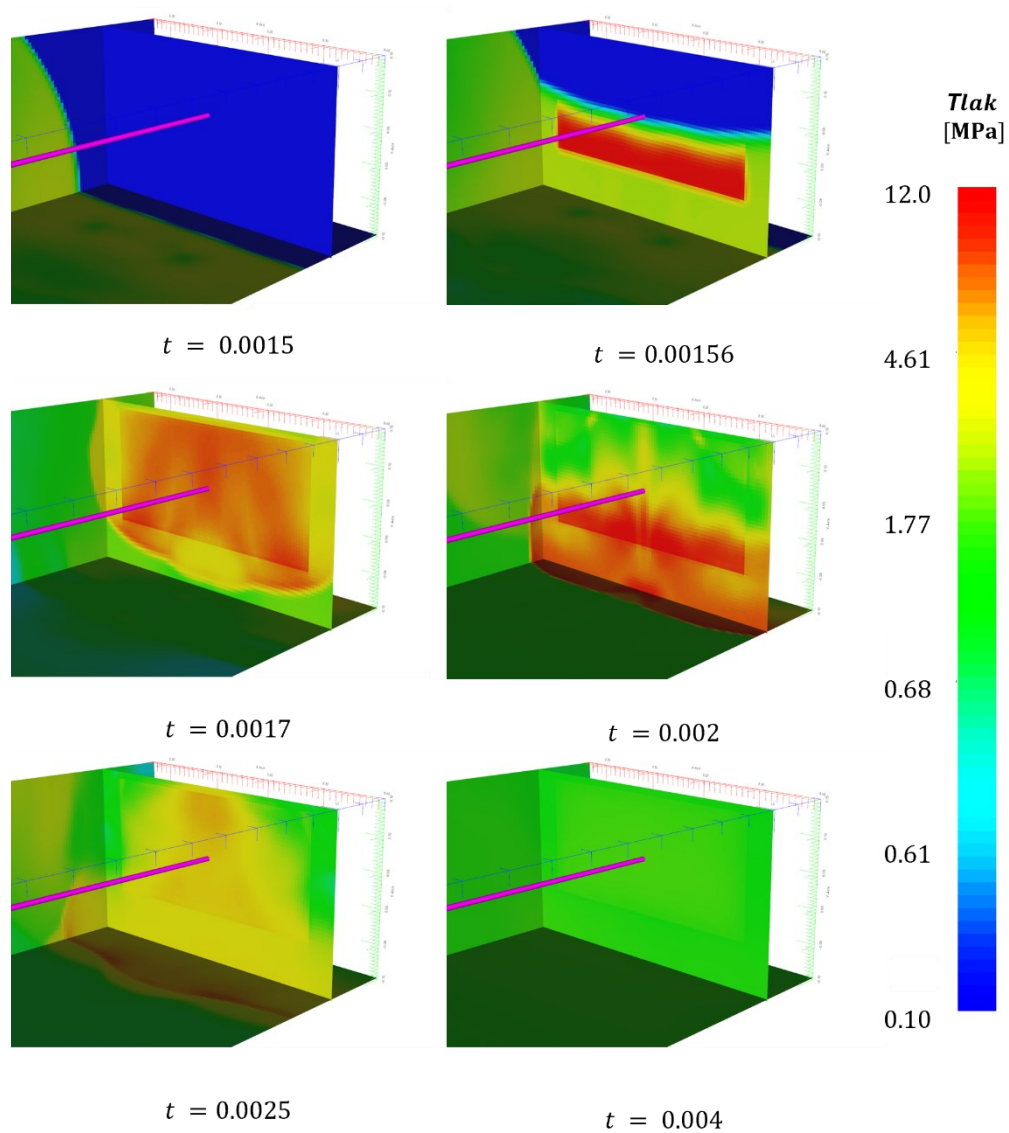


Slika 4: Dodatna 3D plošča za prenos eksplozijske obremenitve (enote v milimetrih)

Prenesena geometrija se v domeno programa Viper::Blast postavi s preprostim pripravljalnim korakom v programskem jeziku Python. V istem koraku se geometrija prilagodi dimenzijam eksplozijskega modela, po zaključeni simulaciji pa se izračunane obremenitve ponovno prenesejo nazaj na konstrukcijski model.

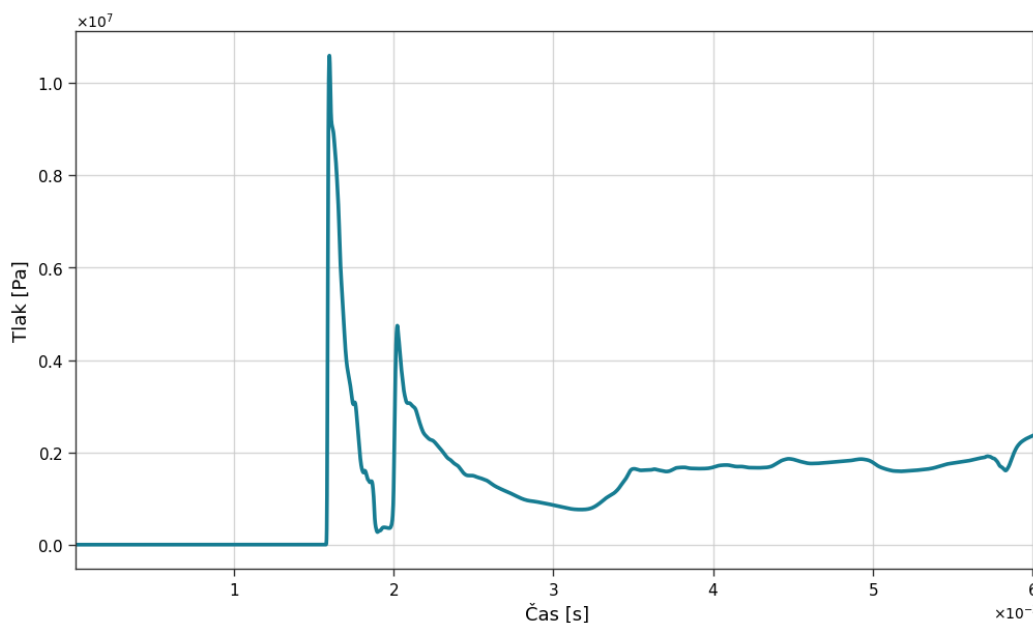
Takšna rešitev predstavlja osnovo za nadaljnjo avtomatizacijo prenosa modelov iz LS-DYNA v Viper::Blast in povratnega prenosa izračunanih obremenitev, kar je eden od korakov tudi v dvosmernemu sklopljenemu postopku.

Slika 5 prikazuje časovni razvoj tlačnega polja na izbrani merilni površini. V prvem primeru je prikazan trenutek neposredno pred dosegom vala do zaščitne strukture. V drugem je razvidno, da je spodnji del površine na začetku bolj obremenjen, kar je posledica odboja eksplozijskega vala od tal. Naslednji prikazi kažejo nadaljnji razvoj tlačne porazdelitve med širjenjem in postopnim upadanjem obremenitve. Zadnji prikaz ustreza istemu časovnemu trenutku kot prvi prikaz deformirane zaščitne strukture na Slika 7, zato omogoča neposredno primerjavo med tlačno obremenitvijo in konstrukcijskim odzivom. Iz tako dobljenega časovno spreminjajočega se tlačnega polja se nato odčitajo časovni poteki tlaka v posameznih vozliščih diskretizirane dodatne plošče. Iz prikaza je hkrati razvidno tudi, da je začetni udarni vrh bistveno izrazitejši od kasnejšega dela obremenitve, kar se nato jasno odraža tudi v časovnem poteku tlaka na Slika 6.



Slika 5: Primer časovnega razvoja tlačnega polja v različnih časovnih trenutkih (v sekundah) na izbrani merilni površini v programu Viper::Blast med prehodom eksplozijskega vala.

Slika 6 prikazuje časovni potek tlaka v naključnem vozlišču in predstavlja primer izhodnega podatka, ki se iz programa Viper::Blast prenese v LS-DYNA kot vhodni podatek tlačne obremenitve na konstrukcijo zaščitne strukture.



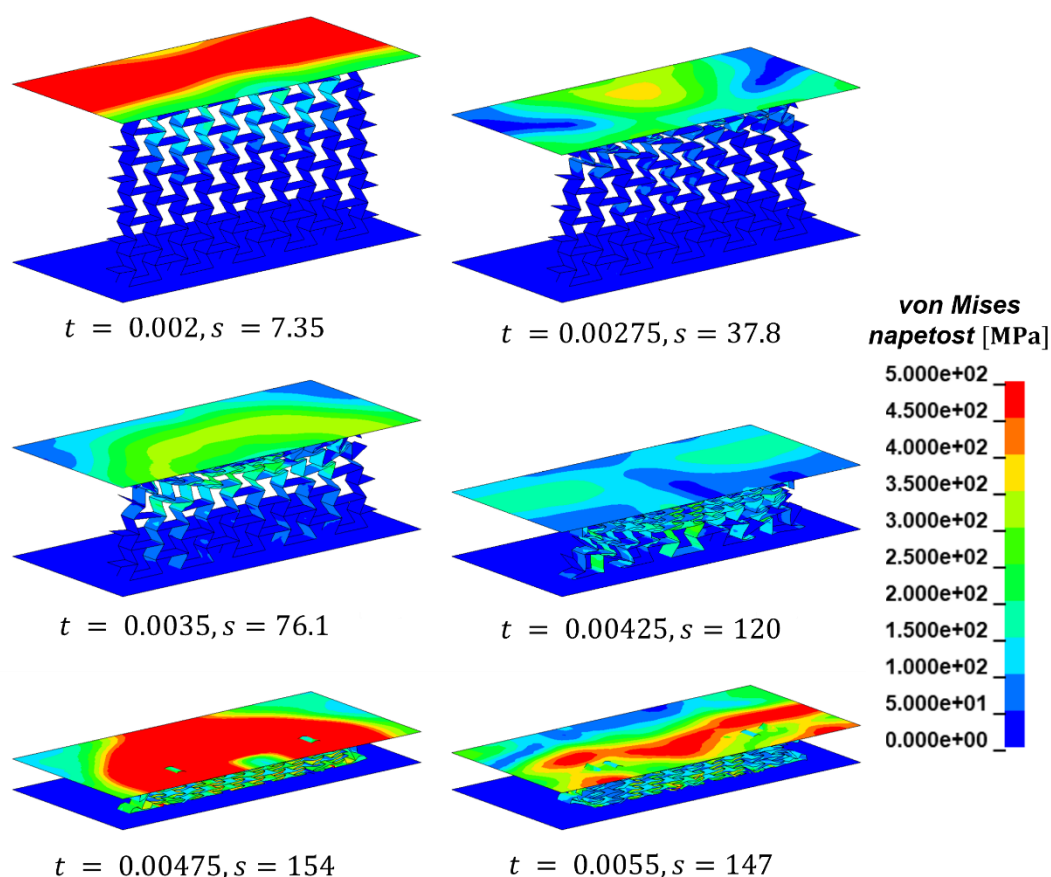
Slika 6: Primer časovnega poteka tlaka, zajetega v naključnem vozlišču plošče v programu Viper::Blast

V obravnavani postavitvi je mogoče spremljati tudi širjenje eksplozijskega vala v območju za zaščitno strukturo v zaščitenem območju. Ker pa je postopek enosmeren, odziv strukture ne vpliva povratno na eksplozijski val, zato zmanjšanje vala zaradi absorbirane energije v tej fazi še ni zajeto.

2.3 Primer konstrukcijskega odziva zaščitne strukture

Predstavljeni postopek že v sedanji enosmerni obliki omogoča pridobitev ocene obnašanja zaščitne strukture na osnovi rezultatov simulacije v programu LS-DYNA. Na Slika 7 je prikazano zaporedje deformiranja zaščitne strukture med delovanjem prenesene eksplozijske obremenitve. Vidno je postopno stiskanje avksetične sredice in spreminjanje von Misesove primerjalne napetosti na zgornji plošči. Poleg deformirane oblike je za vrednotenje učinkovitosti udarne zaščite pomemben tudi pomik zgornje plošče zaščitne strukture. Oznaki t in s predstavljata čas od trenutka eksplozije in pomik zgornje plošče v milimetrih.

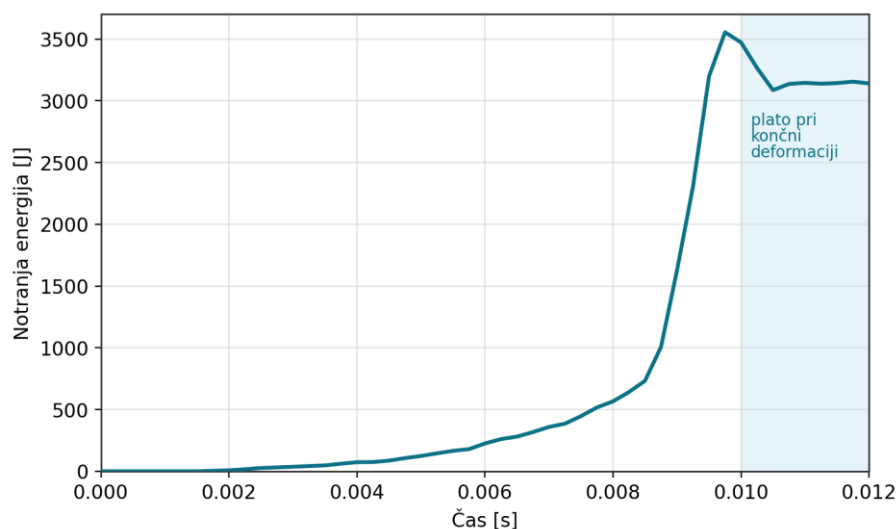
Eden izmed dobljenih rezultatov je tudi časovna sprememba notranje energije zaščitne strukture, ki zajema shranjeno elastično energijo ter disipirano energijo plastifikacije in je prikazana na Slika 8. Ta med tlačnim obremenjevanjem strukture zaradi eksplozijskega vala narašča dokler ne doseže svoje največje vrednosti, ko je sredica zaščitne strukture v veliki meri popolnoma stisnjena. Padec v notranji energiji je posledica prenehanja delovanja tlačne obremenitve, in posledična sprostitve notranje energije zaščitne strukture.



Slika 7: Zaporedje deformiranja zaščitne strukture med obremenjevanjem z eksplozijskim valom. Prikazana je deformirana oblika strukture, porazdelitev von Misesove ekvivalentne napetosti ter pomik v milimetrih zgornje plošče v izbranih časovnih trenutkih v sekundah.

Notranja energija zaščitne strukture daje indikacijo učinkovitosti njene absorpcije udarne energije eksplozijskega vala. Namen strukture je, da se pri delovanju eksplozijskega vala v čim večji meri elasto-plastično deformira in s tem absorbira energijo udarnega eksplozijskega vala. Nivo notranje energije zato predstavlja prvo kvantitativno informacijo o tem, kako uspešno zaščitna struktura absorbira udarno obremenitev.

Prikazani rezultat potrjuje, da prenesena eksplozijska obremenitev v modelu LS-DYNA povzroči smiseln odziv strukture. Hkrati pa predstavlja količino, ki jo bo mogoče v nadaljevanju uporabiti pri primerjavi različnih geometrij z vidika absorpcije udarne energije eksplozijskega vala.



Slika 8: Primer časovne spremembe notranje energije zaščitne strukture.

3 Sklep in nadaljnje delo

Prispevek prikazuje, kako je mogoče referenčni primer eksplozije vodika na poenostavljenem modelu zaščitne strukture obravnavati s kombinacijo simulacije razvoja eksplozijskega vala s programom Viper::Blast ter njegovega vpliva na zaščitno strukturo s programom LS-DYNA, zaenkrat z enosmerno (šibko) sklopljeno obravnavo problema. Končni rezultati v smislu deformiranja zaščitne strukture in posledične sposobnosti absorbiranja udarne energije eksplozijskega vala ter deformacije zadnje plošče omogoča omogočajo kvalitativno in kvantitativno vrednotenje učinkovitosti zaščitne strukture.

Naslednji korak razvoja je nadgradnja sedanje enosmerne sklopljene obravnave v dvosmerno (močno) sklopljeno obravnavo problema, kjer deformiranje zaščitne strukture vpliva na spremembo eksplozijskega vala in s tem na spremembo časovnega poteka delujočih tlakov na njeno površino, s čimer bo mogoče natančneje ovrednotiti učinkovitost zaščitne strukture kakor tudi dejanski vpliv eksplozijskega vala na prostor za zaščitno pregrado. Ko bo ta povezava vključena, bo isti postopek mogoče uporabiti tudi za neposrednejšo primerjavo različnih zaščitnih geometrij pri isti eksplozijski obremenitvi.

Literatura

- [1] Ansys, Inc., LS-DYNA, Version 2025R2, Canonsburg, PA, USA, 2025
- [2] G. Imbalzano, P. Tran, T. D. Ngo, P. V. S. Lee, A Numerical Study of Auxetic Composite Panels under Blast Loadings, *Composite Structures* 135, 339-352, 2015.
- [3] S. Kim, T. Jang, T. Oli, C. Park, Behavior of Barrier Wall under Hydrogen Storage Tank Explosion with Simulation and TNT Equivalent Weight Method, *Applied Sciences* 13(6), 3744
- [4] N. Novak, H. Al-Rifaie, A. Airolidi, L. Krstulovic-Opara, T. Lodygowski, Z. Ren, M. Vesenjak, Quasi-static and Impact Behaviour of Foam-filled Graded Auxetic Panel, *International Journal of Impact Engineering* 178, 104606, 2023.
- [5] N. Novak, L. Starcevic, M. Vesenjak, Z. Ren, Blast Response Study of the Sandwich Composite Panels with 3D Chiral Auxetic Core, *Composite Structures* 210, 167-178, 2019.
- [6] Viper Applied Science Ltd., Viper::Blast, Version 1.31.0, United Kingdom, 2026.
- [7] U.S. Department of Energy, Hydrogen Storage, <https://www.energy.gov/cmei/fuels/hydrogen-storage>, dostopano 24. 6. 2026.



Meritev debeline mejne plasti na rotirajočem se disku v vodi z uporabo merilnega sistema LDA

Andraž Roger¹ in Matej Fike¹

Measurement of Boundary Layer Thickness on a Rotating Glass Disk in Water Using Laser Doppler Anemometry

Povzetek. Prispevek obravnava eksperimentalno meritev debeline mejne plasti na rotirajočem se steklenem disku v vodi. Hitrost je bila merjena z 2D laserskim merilnim sistemom za merjenje hitrosti delcev Laser Doppler Anemometry (LDA). Za ta namen je bil izdelan eksperimentalni model iz stekla z visoko prepustnostjo svetlobe (Optiwhite) in steklenim diskom premera 120 mm. Stekleni disk je bil gnan z asinhronskim motorjem, krmiljenje hitrosti je bilo izvedeno s frekvenčnim regulatorjem. Minimalna razdalja od diska, kjer se hitrost še lahko meri, izvira iz fizičnih omejitev merilnega sistema, kjer največ vpliva faktor izbire različnih fokusnih leč, posledica tega pa je velikost merilnega volumna in s to debelino, najmanjša oddaljenost od diska – torej najmanjša možna resolucija meritve mejne plasti. Za sledilne delce je bil uporabljen poliamid s povprečnim premerom delcev $50\ \mu\text{m}$ in za boljše razmešanje delcev, je bil uporabljen izopropanol. Rezultati, podani v grafični in tabelarni obliki prikazujejo, kako hitrost z oddaljenostjo od diska pada in se eventualno ustali pri hitrosti kroženja fluida v merilni posodi. Iz rezultatov je moč razbrati debelino mejne plasti, ki znaša 4 mm na spodnji in 3 mm na zgornji strani diska. Izmerjeni rezultati nakazujejo na nesimetričnost zgornje in spodnje strani diska.

Abstract. This paper presents an experimental investigation of the boundary layer on a rotating glass disk in water using Laser Doppler Anemometry (LDA). The measurements were performed with a 2D LDA system. For this purpose, an experimental model made of high-transmittance (Optiwhite) glass was constructed, including a glass disk with a diameter of 120 mm. The disk was driven by an asynchronous motor, and the rotational speed was controlled by a frequency converter. Minimum distance from the disk, where speed is still obtainable, is derived from physical measurement system constraints. Polyamide particles with an average diameter of $50\ \mu\text{m}$ were used as tracer particles, while

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za energetiko

isopropanol was added to promote particle dispersion. The velocity profile was measured at a radial distance of 50 mm from the disk centre. The results, presented graphically and in tabular form, show a decrease in velocity with increasing distance from the disk surface, eventually approaching the residual circulation velocity of the fluid in the measurement tank. From the results, the thickness of boundary layer can be obtained, 4 mm at the bottom and 3 mm at the upper side of the disk. The measured results indicate nonsymmetric conditions on the bottom and top side of the disk.

1 Uvod

Tok ob rotirajočem disku predstavlja enega izmed klasičnih problemov mehanike tekočin, saj se pri takšni geometriji zaradi viskoznega striga ob površini diska razvije mejna plast, znotraj katere se hitrost fluida izrazito spreminja v smeri pravokotno na površino.

Za neinvazivno merjenje hitrostnih polj v tekočinah se uporabljajo različne optične metode, med katerimi so najpogostejše Particle Image Velocimetry (PIV), Particle Tracking Velocimetry (PTV) in Laser Doppler Anemometry oziroma Laser Doppler Velocimetry (LDA/LDV). Metoda LDA temelji na meritvi Dopplerjeve frekvence sipane na sledilnih delcih, iz katere se nato izračuna hitrost. Pri meritvah blizu stene je pomembna velikost merilnega volumna, saj sistem ne meri idealno točkovno, namreč meri hitrosti vseh delcev, kateri prehajajo skozi merilni volumen. To postane posebej pomembno v mejni plasti, kjer so gradienti hitrosti veliki, zato lahko velikost in orientacija merilnega volumna neposredno vplivata na določitev hitrosti in posledično na oceno debeline mejne plasti [1, 2].

Eksperimentalne raziskave rotirajočih diskov so bile pogosto usmerjene v določanje radialnih, tangencialnih in aksialnih hitrostnih profilov v tekočini. Szeri in ostali [3] so z lasersko Dopplerjevo anemometrijo merili hitrostne profile v vodi med končnimi rotirajočimi diski, pri čemer so analizirali različne kombinacije vrtenja diskov in pretoka skozi sistem. Berman in Pasch [4] sta z metodo Laser Doppler Velocimetry izmerila radialno in kotno komponento hitrosti v laminarni mejni plasti rotirajočega diska ter pokazala, da je iz hitrostnega profila v smeri pravokotno na disk mogoče sklepati tudi na spremembo debeline mejne plasti.

V tem prispevku obravnavamo eksperimentalno meritev hitrosti v mejni plasti rotirajočega se diska v vodi z uporabo merilnega sistema LDA. Uporabljen je steklen model s steklom z visoko prepustnostjo svetlobe in rotirajočega steklenega diska. Zaradi geometrijskih omejitev in potrebe po čim manjšem odmiku merilnega volumna od površine diska je bila v konfiguraciji uporabljena ena komponenta hitrosti. Namen raziskave je določiti spremembo hitrosti z oddaljenostjo od diska, oceniti debelino mejne plasti ter ovrednotiti vpliv velikosti in orientacije merilnega volumna na zanesljivost meritev v bližini rotirajoče površine. Posebej je omenjena tudi sprememba kota laserskega žarka pri prehodu laserskih žarkov skozi različne medije (zrak, steklo, voda), saj se zaradi različnih lomnih količnikov spremeni dejanska pozicija merilnega volumna.

2 Teoretične osnove LDA [1, 5]

Merjenje hitrosti in velikosti kapljic v disperznih tokovih, kot je vodna megla, temelji na izkoriščanju Dopplerjevega pojava. Ko delec prehaja skozi laserski žarek, zaradi lastnega gibanja premakne frekvenco sipane svetlobe glede na frekvenco izvora. Ta Dopplerjev premik je odvisen od relativne hitrosti delca in geometrije sipanja. [5] podaja osnovno zvezo:

$$f_s = f_i \frac{1 - e_i \cdot (U/c)}{1 - e_s \cdot (U/c)} \quad (1)$$

kjer:

- f_i je frekvenca vpadnega žarka,
- u hitrost delca,
- e_i in e_s smer vpadnega in sipanega žarka,
- c hitrost svetlobe.

Ker je $|U/c| \ll 1$, se izraz linearizira v:

$$f_s \approx f_i \left[1 + \frac{U}{c} \cdot (e_s - e_i) \right] \quad (2)$$

Ko imamo dva laserska žarka, ki se sekata pod kotom Θ , oba sipata svetlobo proti detektorju, vendar vsak s svojo smerjo sipanja. Ker se delec premika s hitrostjo U , bo frekvenca sipanja od vsakega žarka rahlo drugačna zaradi Dopplerjevega efekta. Razlika teh dveh sipanih frekvenc ustvari tako imenovano udarno frekvenco (beat frequency) oz. Dopplerjevo frekvenco f_D , ki jo zazna fotodetektor.

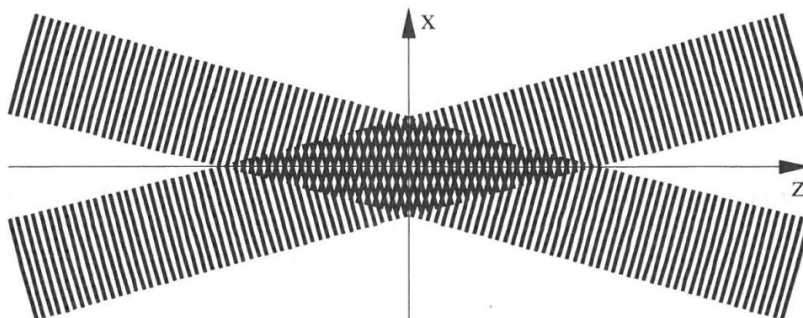
$$\begin{aligned} f_D &= f_{s,2} - f_{s,1} = \\ &= f_2 \left[1 + \frac{U}{c} \cdot (e_s - e_2) \right] - f_1 \left[1 + \frac{U}{c} \cdot (e_s - e_1) \right] = \\ &= f_i \frac{U}{c} \cdot (e_1 - e_2) = \\ &= \frac{f_i}{c} |e_1 - e_2| |U| \cos \Phi = \\ &= \frac{1}{\lambda} 2 \sin(\Theta/2) u_x \end{aligned} \quad (3)$$

Tako imenovana udarna frekvenca oziroma Dopplerjeva frekvenca f_D je bistveno nižja od osnovne frekvence laserske svetlobe, zato jo lahko zaznavamo kot periodične spremembe intenzitete svetlobe na fotodetektorju. Te spremembe nastanejo zaradi interferenčnega utripanja dveh rahlo različnih sipanih valov. Dopplerjeva frekvenca je neposredno sorazmerna s komponento hitrosti v smeri pravokotno na interferenčne proge, zato lahko iz merjene vrednosti f_D izračunamo hitrost delca kot:

$$u_x = \frac{\lambda}{2 \sin(\Theta/2)} f_D \quad (4)$$

2.1 Interferenčni (fringe) model – prostorska razlaga iste frekvence

Frekvenco f_D , ki smo jo izpeljali iz valovne Dopplerjeve teorije, lahko povsem enako interpretiramo še z interferenčnim (fringe) modelom. Namesto da gledamo premik valovne frekvence, si predstavljamo, da dva koherentna laserska žarka ustvarita v presečišču stacionarni vzorec svetlih in temnih pasov oziroma reže (fringes) (Slika 1).



Slika 1: Dva laserska žarka pod kotom Θ na presečišču ustvarita stacionarni vzorec svetlih in temnih pasov oziroma rež (fringes)

Delci, ki prehajajo skozi ta vzorec, zaporedno prečkajo svetle (maksimum) in temne (minimum) pasove, zato na detektorju povzročijo periodično modulacijo intenzitete – ravno tisto, ki ji pravimo Dopplerjeva frekvenca.

Prostorski razmik med dvema sosednjima režama

$$\Delta x = \frac{\lambda_b}{2 \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right)} \quad (5)$$

kjer je λ valovna dolžina laserja, Θ pa kot med žarkoma [1, 5].

Če delec prehaja čez proge s hitrostjo u_x (pravokotno na proge), prečka razdaljo Δx v času

$$t = \frac{\Delta x}{u_x} \quad (6)$$

zato se na detektorju pojavi frekvenca, kjer opazimo, da je f_{fringe} natanko enaka Dopplerjevi frekvenci f_D

$$f_{fringe} = \frac{1}{t} = \frac{u_x}{\Delta x} = \frac{2 \sin(\Theta/2)}{\lambda} u_x = f_D \quad (7)$$

Da bi poleg velikosti hitrosti dobili tudi smer (npr. pozitivna/negativna), se lahko v enega od žarkov doda t.i. Bragg celica, ki povzroči znani frekvenčni zamik, zaradi česar postanejo interferenčne proge “potujoče”, in s tem omogočijo razločevanje smeri gibanja [1, 5].

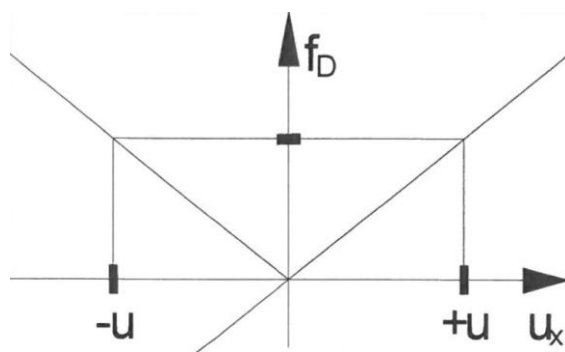
2.2 Frekvenčni zamika laserja

Slabost do sedaj opisanega LDA pristopa pa je, da bodo negativne hitrosti povzročile negativne frekvence, detektor oziroma sprejemnik pa ne more razločiti med pozitivno in negativno frekvenco. Zato pride do usmeritvene dvoumnosti.

V idealnem primeru bi imeli dve premici, eno za pozitivno in eno za negativno hitrost (Slika 2). Ker pa detektor ne razločuje med pozitivno ali negativno frekvenco, lahko vzamemo absolutno vrednost enačbe 7:

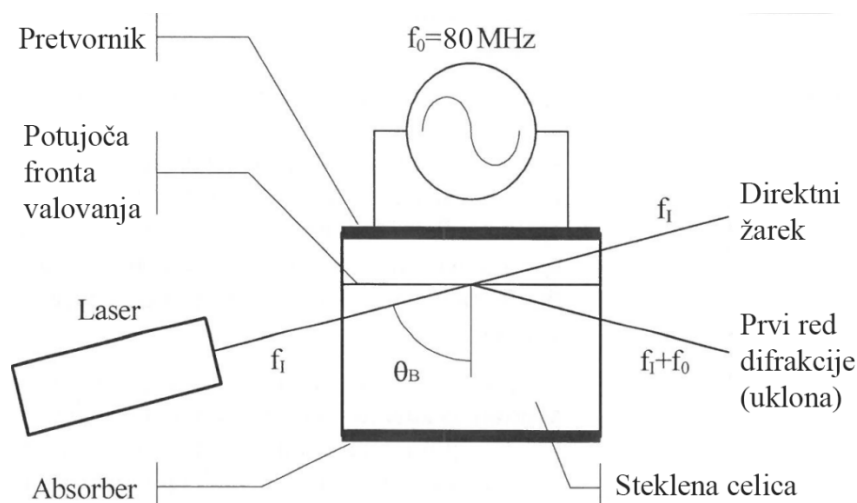
$$f_D = \left| \frac{2 \sin(\theta/2)}{\lambda} u_x \right| \quad (8)$$

Torej neodvisno, ali imamo hitrost pozitivno ali negativno, bo Dopplerjeva frekvenca f_D pozitivna (Slika 2).



Slika 2: Premica označuje linearno odvisnost med hitrostjo u in frekvenco f_D . Neodvisno od smeri hitrosti, bo vrednost frekvence vedno pozitivna

Da bi poleg velikosti hitrosti dobili tudi smer (npr. pozitivna/negativna), se lahko v enega od žarkov doda t.i. Bragg celica (Slika 3), ki povzroči znani frekvenčni zamik, zaradi česar postanejo interferenčne proge “potujoče”, in s tem omogočijo razločevanje smeri gibanja. [1, 5]



Slika 3: Braggovala celica

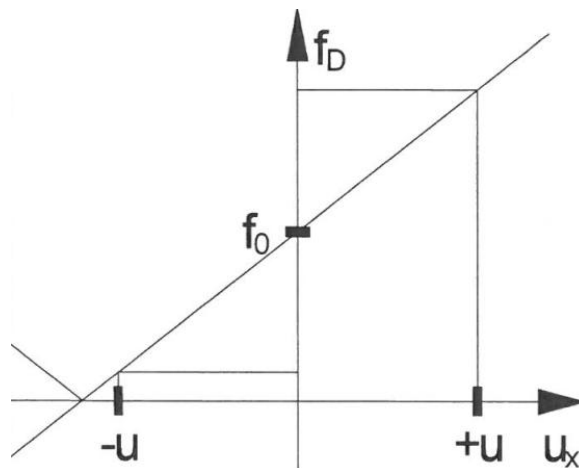
Na eni strani Braggovala celice je elektromehanski pretvornik, katerega poganja oscilator. Ta proizvaja akustični val, ki se širi skozi ploščo in ustvarja periodični gibajoči se vzorec visoke in nizke gostote. Nasprotna stran plošče je oblikovana tako, da zmanjša odboj akustičnega vala, ter je pritrjena na material, ki absorbira akustično energijo.

Vpadni svetlobni žarek zadene vrsto potujočih valovnih front, ki delujejo kot debela uklonska mrežica. Interferenca svetlobe, ki jo razprši vsaka akustična valovna fronta, povzroči, da se maksimalne intenzitete oddajajo v različnih smereh. Z nastavitvijo intenzitete akustičnega signala in naklonskega kota θ_B Braggovala celice je mogoče uravnati razmerje intenzitete med direktnim žarkom in prvim redom uklona. V sodobni LDA opremi se to izkorišča tako, da se Braggovala celica uporablja kar kot razdelilnik žarka. S tem se ne odpravi le potreba po ločenem razdelilniku žarka, ampak se tudi izboljša celotna učinkovitost optike za prenos svetlobe, saj lahko več kot 90 % laserske energije doseže merilni volumen.

Braggovala celica doda fiksni frekvenčni zamik f_0 k uklonjenemu žarku, zato lahko zapišemo

$$f_D \cong f_0 + \frac{2 \sin(\theta/2)}{\lambda} u_x \quad (9)$$

V kolikor hitrost delca ne povzroči negativnega frekvenčnega zamika večjega od f_0 , bo Braggovala celica zagotovila merljivo pozitivno Dopplerjevo frekvenco f_D (Slika 4).



Slika 4: Razreševanje usmeritvene dvournosti z uporabo frekvenčnega zamika f_0

Ali z drugimi besedami, frekvenčni zamik f_0 omogoča merjenje negativnih hitrosti do

$$u_x > -\frac{\lambda f_0}{2 \sin(\theta/2)} \quad (10)$$

brez usmeritvene dvournosti.

Naša postavitev merilnega sistema LDA omogoča meritev hitrosti do

$$u_x > -\frac{660 \cdot 10^{-9} \text{ m} \cdot 80 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}}{2 \sin(6,868^\circ/2)} = -91,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (11)$$

Navzgor je največja merljiva hitrost omejena zgolj z odzivnim časom fotopomnoževalke in nadaljnjo elektroniko za obdelavo signalov. V sodobni opremi proizvajalca Dantec, to omogoča meritve daleč v nadzvočno področje.

2.3 Siplni mehanizmi

Pri analizi faznega zamika v LDA je potrebno razumeti, da svetloba, ki se odbije ali prelomi v kapljici, lahko prispeva več različnih sipalnih mehanizmov. Najpogosteje upoštevamo:

- odboj (reflection), kjer svetloba enkrat reflektira na površini kapljice; to ustvari enolično, a pogosto šibkejšo fazno razliko, predvsem pri kovinskih ali trdnih delcih,
- lom prvega reda (first-order refraction) – kjer svetloba enkrat preide skozi kapljico in se dvakrat lomi (na vstopu in na izstopu). To je dominantni mehanizem pri vodnih kapljicah in kapljevinah, katere dovoljujejo tok svetlobe skozi njih,
- lom drugega reda (second-order refraction) – kjer svetloba dvakrat preide skozi kapljico (kjer se poleg dveh lomov (na vstopu in izstopu) še odbije od notranje površine kapljice).

Celotno obsežno fizikalno ozadje sistemov LDA, vključno s sipalnimi principi, je podrobneje opisano v [1].

Glede na Lorenz-Mie teorijo sipanja, je svetloba sipana istočasno na vse strani, nas pa zanima samo sipana svetloba v smeri sprejemnika. Sprejemnik sprejeto svetlobo po optičnem vlaknu pošlje do fotopomnoževalke (PM), katera pomnoži število prejetih fotonov. Dantec [5] navaja, da je potrebno napetost na PM nastaviti tako, da najmanjši signali presegajo šum, vendar ne pride do nasičenja pri večjih kapljicah. Previsoka napetost lahko poveča šum, prenizka pa povzroči, da manjših kapljic sistem ne zazna. Posledično je izbira PM napetosti in analognega ojačanja vitalnega pomena za zanesljive meritve velikosti delcev in zavisi od specifične aplikacije. [6]

3 Metodologija raziskave

V nadaljevanju je predstavljena eksperimentalna zasnova, s katero je izmerjena hitrost fluida v mejni plasti steklenega diska debeline 4 mm.

Uporabljen je CW diodni laserski izvor z valovno dolžino 660 nm, detektorja sta proti merilnemu volumnu laserja usmerjeni pod kotom 180° glede na lasersko ravnino in sta integrirana v lasersko glavo. Dominanten sipalni mehanizem je odboj (reflection) in trenutno postavitev lahko imenujemo tudi »backscatter«. Za sledilne delce je uporabljen poliamid povprečne velikosti $50 \mu m$ in za boljšo disperzijo je uporabljen izopropil alkohol. Sistem LDA vsebuje dva detektorja in posledično fotopomnoževalki (PM), katerih napetost ojačanja (AV) lahko neodvisno prilagajamo v območju 400 – 1400 V, signalno ojačanje (SG) pa v razponu 0 – 30 dB. Moč laserskega izvora je 90 mW in ni nastavljiva. Razmerje med signalom in šumom (SNR) je nastavljeno na 1 dB.

Pri meritvah blizu stene pa je izredno pomemben še podatek o merilnem volumnu laserja, katerega dimenzije s trenutno postavitevjo optike znašajo $[dx; dy; dz] = [0.191; 0.191; 3,189] mm$. Torej v vseh smereh, x, y in z, lahko izmerimo vse hitrosti, ki se nahajajo v tej razdalji, kar predstavlja relativno veliko omejitev sistema, še posebej blizu diska, kjer imamo velike gradientne hitrosti. Glede na to, da je v smereh x in y ta razdalja najnižja, je bilo potrebno postavitev eksperimenta tudi tako zastaviti.

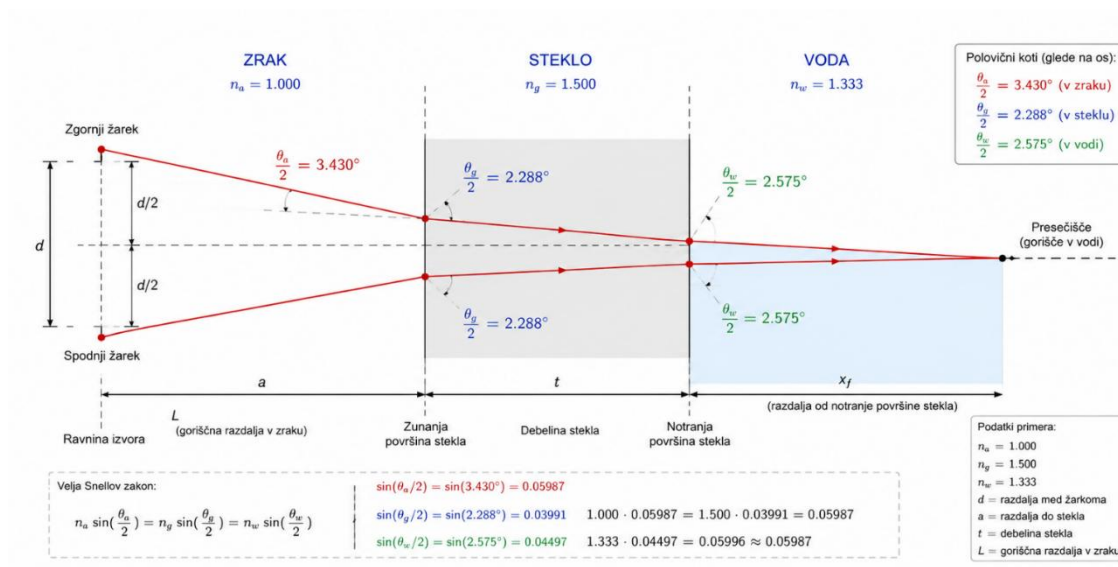
Vsi podatki o merilnem sistemu so podani v Tabela 1.

Velik vpliv na meritve, oz. bolj specifično na točko merjenja, pa ima medij, v kateremu izvajamo meritve. Za naš primer imamo stik treh različnih medijev: zrak, steklo in voda (Slika 5). Vsak od teh ima različen lomni količnik. Ker laserski žarek prehaja skozi vse tri medije, se s tem spremeni tudi kot laserskega žarka in posledično goriščna razdalja, katera pa po tem prehodu ni več enaka nazivni goriščni razdalji laserskega sistema. Novo dejansko goriščno razdaljo izračunamo iz zapisa Snellovega zakona za vse tri medije oz. lomne količnike:

$$x = \frac{(L - a) \cdot \tan \frac{\theta_a}{2} - t \cdot \tan \frac{\theta_g}{2}}{\tan \frac{\theta_w}{2}} \quad (12)$$

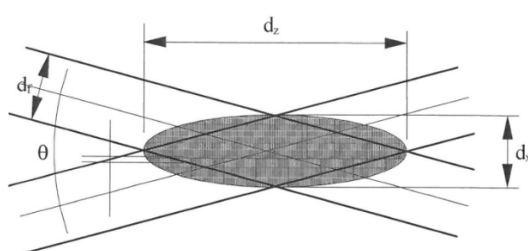
kjer so:

x – nova goriščna razdalja sistema,
 L – osnovna goriščna razdalja sistema,
 a – oddaljenost izvora žarka do stekla,
 θ_a – kot žarkov v zraku,
 θ_g – kot žarkov v steklu,
 θ_w – kot žarkov v vodi.



Slika 5: Sprememba kotov žarkov skozi medije zrak, steklo in voda

Z meritvijo je na razdalji 50 mm od središča diska izmerjena hitrost v točkah v Z smeri. Sistem je postavljen tako, da je komponenta merilnega volumna dz pravokotno na os vrtenja, komponente merilnega volumna so prikazane na Slika 6.



Slika 6: Merilni volumen LDA sistema, kjer je d_x dolžina volumna v X smeri, d_f je premer žarka v gorišču in je $d_f = d_y$, kjer je d_y dolžina volumna v Y smeri in d_z dolžina merilnega volumna v Z smeri.

S tem smo izmerili hitrosti čim bolj točkovno. Na Slika 7 je prikazan koordinatni sistem postavitve ter označene komponente hitrosti laserskega sistema. Hitrosti smo merili izključno v Y smeri našega koordinatnega sistema, torej smo merili komponento hitrosti u .



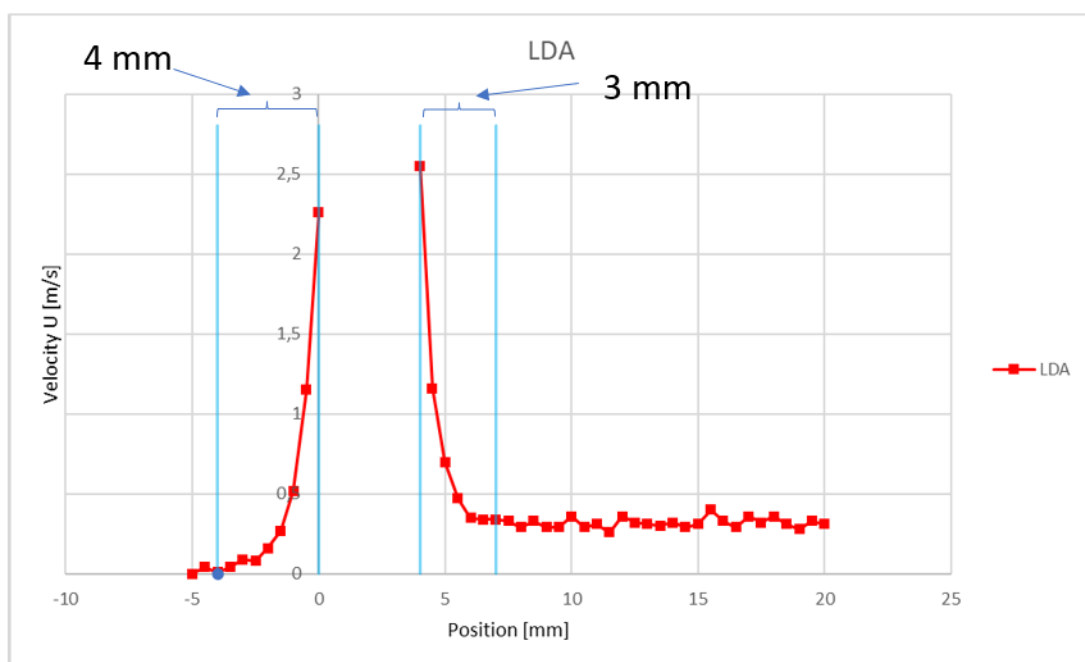
Slika 7: Prikazano mesto opravljanja meritev – hitrost je bila merjena v Z smeri (prikazano z oranžno črto), 50 mm od centra (prikazujeta sliki a) in b)). Slika a) prikazuje koordinatni sistem merilnega sestava. Merila se je u komponenta hitrosti, v smeri osi Y.

Tabela 1: Podatki merilnega sistema

Laser	Diodni CW
Moč laserja	90 mW
Valovna dolžina	660 nm
Goriščna razdalja (oddajnik)	500 mm
Kot presečišča žarkov $\theta/2$	$3,434^\circ$
Merilni volumen dx	0,191 mm
Merilni volumen dy	0,191 mm
Merilni volumen dz	3,189 mm
Goriščna razdalja (sprejemnik)	400 mm
Kot med oddajnikom in sprejemnikom Φ	30°
Dominantna oblika sipanja	Odboj (reflection)

4 Rezultati meritev

Izvajali smo meritve hitrosti na vrtečem disku s hitrostjo 1122 rpm v 44 točkah, v skupni razdalji 25 mm v Z smeri. Vrtljaji diska so bili izmerjeni z optičnim tahometrom ter verificirani z uporabo LDA. Korak med posameznimi meritvami je bil 0,5 mm. Rezultati meritev so prikazani na Slika 8 in tabelarično v Tabela 2.



Slika 8: LDA meritve mejne plasti na rotirajočem disku pri 1122 rpm

Tabela 2: Rezultati meritev

Meritev	Z [mm]	U-mean [m/s]
1	20	0,31
2	19,5	0,33
3	19	0,28
4	18,5	0,31
5	18	0,36
6	17,5	0,32
7	17	0,36
8	16,5	0,29
9	16	0,33
10	15,5	0,4
11	15	0,31

Meritev	Z [mm]	U-mean [m/s]
12	14,5	0,29
13	14	0,32
14	13,5	0,3
15	13	0,31
16	12,5	0,32
17	12	0,36
18	11,5	0,26
19	11	0,31
20	10,5	0,29
21	10	0,36
22	9,5	0,29

Meritev	Z [mm]	U-mean [m/s]
23	9	0,29
24	8,5	0,33
25	8	0,29
26	7,5	0,33
27	7	0,34
28	6,5	0,34
29	6	0,35
30	5,5	0,47
31	5	0,7
32	4,5	1,16
33	4	2,55

Meritev	Z [mm]	U-mean [m/s]
34	0	2,26
35	-0,5	1,15
36	-1	0,52
37	-1,5	0,27
38	-2	0,16
39	-2,5	0,08
40	-3	0,09
41	-3,5	0,04
42	-4	0,01
43	-4,5	0,04
44	-5	0

Obodna hitrost na oddaljenosti 50 mm od centra znaša:

$$v_{50mm} = \omega \cdot r_{50mm} = \frac{2\pi n}{60} \cdot r_{50mm} = 2\pi \cdot \frac{1122rpm}{60} \cdot 0,050 m = 5,875 \frac{m}{s}$$

5 Diskusija rezultatov

Iz rezultatov meritev hitrosti z uporabo metode LDA je iz Slika 8 razvidna debelina mejne plasti, katera je bila določena po kriteriju δ_{99} [7]. Merjena hitrost se z oddaljenostjo od diska zmanjšuje proti približno ustaljeni hitrosti kroženja kapljevine v posodi, posledično je bila na podlagi tega kriterija določena debelina mejne plasti, katera pod diskom znaša 4 mm, nad diskom pa 3 mm. Med meritvijo 33 in 34 je skok iz 4 na 0 mm, saj se na tem mestu najdemo v disku, kjer rezultatov meritev ni, zato so bili tudi izpuščeni s slike in iz tabele rezultatov. 4 mm je točno debelina našega steklenega diska. Prav tako je iz rezultatov meritev razvidno, da ne na spodnji, niti na zgornji strani nismo prišli blizu oz. smo prišli le na polovico obodne hitrosti diska na radiju 50 mm. Maksimalna izmerjena hitrost na spodnji strani diska znaša 2,26 m/s, na zgornji strani pa 2,55 m/s.

Pričakovati je bilo, da bodo meritve simetrične, torej da bo stanje na zgornji površini diska enako stanju na spodnji površini. Temu ni bilo tako, meritve so pripomogle k razumevanju najverjetnejšega vzroka, zakaj do tega pride. Na spodnji strani diska imamo v vseh smereh steno, medtem ko imamo na zgornji strani diska zgornjo površino odprto na okolico. Tam pride do interakcije z okoliškim zrakom. Tudi med samo meritvijo je bilo evidentno, da ima voda na delu nad diskom določeno hitrost, saj bi v nasprotnem primeru mirovala. Hitrosti pod diskom s prostim očesom ni bilo moč določiti. Meritve kažejo, da se je tam hitrost približevala 0 m/s.

6 Zaključek

Zaključimo lahko, da je za korektno izvedbo meritev potrebno dodobra poznati sistem, s katerim opravljamo meritve. V našem primeru je pomembna velikost merilnega volumna, še posebej v dz smeri (Slika 6 – gledano z vidika laserskega sistema – laserski dz ni enak naši smeri Z). Eksperiment moramo zasnovati tako, da merimo v smeri najmanjše dimenzije merilnega volumna, v našem primeru sta to dx in dy . Če bi merili v smeri dz , lahko v samem merilnem volumnu popišemo kar 7 naših točk (komponenta dz merilnega volumna znaša 3,189 mm), kar pa glede na debelino mejne plasti pomeni, da smo v eni meritvi že pomerili celotno mejno plast. Torej bi kot rezultat dobili povprečje vseh izmerjenih hitrosti, kar ni korektno. Seveda pa se zaradi meritve hitrosti v vodi ta dimenzija še malenkost spremeni, kar pa smo zaradi meritev v komponenti laserskega sistema dx , zanemarili. Če rečemo, da merimo hitrost točno v točki 50 mm od centra, znaša tam izračunana obodna hitrost pri 1122 rpm 5,875 m/s. Vzemimo polovico merilnega volumna v $dz = 3,189 \text{ mm}$ smeri na zunanjo stran diska in polovico na notranjo stran diska (proti centru). Sprememba hitrosti znaša $\Delta v(\frac{dz}{2}) = 0,187 \text{ m/s}$. Ker je sprememba hitrosti s polmerom, zaradi konstantne vrtilne hitrosti, linearna, je sprememba v obe smeri enaka. Relativna sprememba torej znaša $\frac{\Delta r}{r_0} \cdot 100 = \frac{1,5945 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} \cdot 100 = 3,19 \%$. Merilni volumen v laserski dz smeri torej zajema hitrosti 3,19 % nad in pod našo obodno hitrostjo v točki $r_0 = 50 \text{ mm}$. To pa po našem mnenju ne igra tako pomembne vloge, posledično lahko domnevamo, da tudi sprememba komponente merilnega volumna v dz smeri zaradi spremembe kota žarkov v vodi, nima večjega vpliva na rezultate meritev.

Ker smo z meritvami blizu diska izmerili najvišji hitrosti 2,26 in 2,55 m/s, bi bilo za delo v prihodnje smiselno zmanjšati raster oz. korak meritev ter še z višjo resolucijo popisati hitrostne razmere v mejni plasti in se približati dejanski obodni hitrosti diska.

Literatura

- [1] Albrecht, H. E., et al., Laser Doppler and Phase Doppler Measurement Techniques. 2003.
- [2] Tropea, Cameron, Yarin Alexander, Foss John, Springer Handbook of Experimental Fluid Mechanics. 2007.
- [3] Szeri, A. Z., et al. Flow between rotating disks. Part 1. Basic flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 1983, vol.(134), 103-131.
- [4] Berman, Neil S., Pasch Mark A. Laser Doppler Velocity Measurements for Dilute Polymer Solutions in the Laminar Boundary Layer of a Rotating Disk. *Journal of Rheology*. 1986, vol.(30) (3), 441-458.
- [5] Dantec Dynamics, LDA and PDA - reference manual. 2011.
- [6] Kapulla, Ralf, Najera Salvador Bravo. Operation conditions of a phase Doppler anemometer: droplet size measurements with laser beam power, photomultiplier voltage, signal gain and signal-to-noise ratio as parameters. *Measurement Science and Technology*. 2006, vol.(17) (1), 221.
- [7] Schlichting, Hermann, Gersten Klaus, Boundary-Layer Theory. 9th ed. 2017: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.



Poissonovo razmerje rotiranih vbočenih avksetičnih struktur

Aleksej Rikić¹ in Matej Borovinšek¹

Poisson's Ratio of Rotated Re-entrant Auxetic Structures

Povzetek. V prispevku je predstavljena numerična metodologija za določanje globalnega Poissonovega razmerja avksetičnih celičnih struktur. Primerjana sta integralni pristop, pri katerem se Poissonovo razmerje določi iz prostorsko povprečenih komponent deformacijskega polja, in klasični pristop, ki temelji na spremljanju pomikov oziroma spremembi zunanjih dimenzij strukture. Obravnavana je bila vbočena avksetična struktura pri različnih orientacijah glede na smer obremenjevanja. Predstavljena metodologija omogoča primerjavo globalnega in prostorsko povprečnega odziva ter vrednotenje vpliva orientacije in izbire merilnega območja na določeno vrednost Poissonovega razmerja.

Abstract. This paper presents a numerical methodology for determining the global Poisson's ratio of auxetic cellular structures. Two approaches are compared: an integral approach, in which Poisson's ratio is determined from spatially averaged components of the strain field, and a conventional approach based on monitoring displacements or changes in the external dimensions of the structure. A re-entrant structure was analysed at different orientations relative to the loading direction. The proposed methodology enables a comparison between the global and spatially averaged responses and allows the influence of structural orientation and the selected measurement region on the determined Poisson's ratio to be evaluated.

1 Uvod

Avksetične celične strukture se pri natezni obremenitvi raztezajo tako v smeri obremenjevanja kot tudi v prečni smeri, zato je zanje značilno negativno Poissonovo razmerje [1–4]. Takšen odziv pri celičnih strukturah praviloma ne izvira iz lastnosti osnovnega materiala, temveč iz geometrijsko pogojenega deformacijskega mehanizma osnovnih celic. Pri vbočenih avksetičnih strukturah se prečno širjenje razvije predvsem zaradi odpiranja navznoter usmerjenih povezav, pri kiralnih strukturah pa zaradi sočasne rotacije vozlišč in upogibanja povezav [1,2,5–8].

Določanje Poissonovega razmerja celičnih struktur je zahtevnejše kot pri homogenih materialih. Deformacijsko polje je nehomogeno, lokalni odziv pa je odvisen od položaja celice, oddaljenosti od vpetja, orientacije strukture in velikosti izbranega merilnega območja [6,9–11]. Yolcu in Okutan Baba [9] sta pokazala, da lahko izbira merilnih točk in območja

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

pomembno vpliva na izračunano vrednost Poissonovega razmerja. Zaradi tega je pri numeričnih analizah poleg rezultata treba natančno opredeliti tudi uporabljeno merilno domeno in način povprečenja deformacij [9–11].

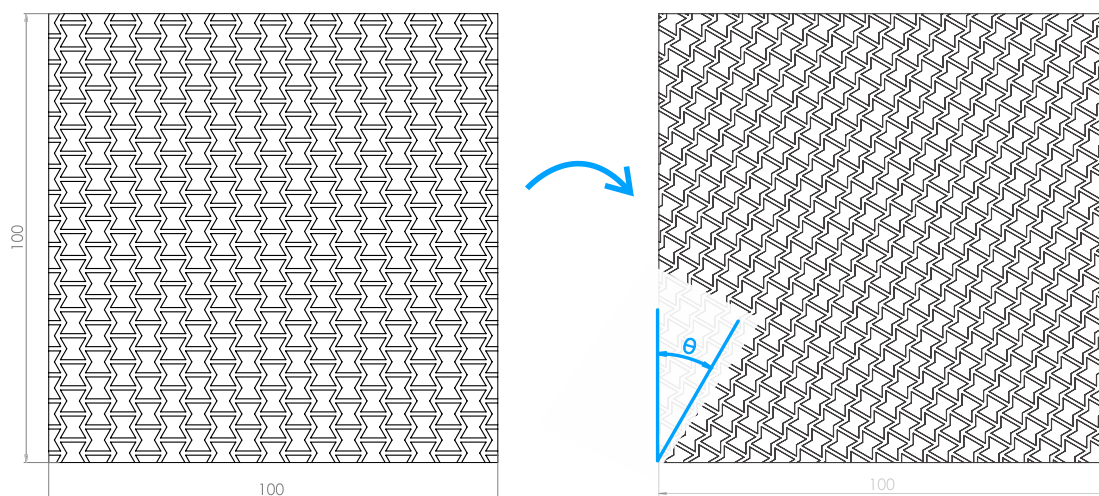
Cilj raziskave je primerjati tri numerične pristope za določanje globalnega Poissonovega razmerja. Prvi temelji na integraciji deformacijskega polja v porah, zapolnjenih z navideznim polnilom, drugi na integraciji deformacijskega polja na navideznih merilnih domenah, ki prekrivajo analizirano območje strukture. Tretji pristop temelji na spremljanju pomikov in spremembi zunanjih dimenzij strukture. Dodatni cilj raziskave je ovrednotiti konvergenco rezultatov glede na velikost numeričnega vzorca in obseg integracijske domene deformacij ter analizirati vpliv orientacije na globalno Poissonovo razmerje izbranih avksetičnih geometrij.

2 Numerični del in metodologija

2.1 Obravnavana geometrija

Osnovna analizirana geometrija je bila dvodimenzionalna vbočena avksetična struktura. Za geometrije je bila osnovna celica periodično razmnožena do numeričnega vzorca s približno 430 celicami. Veliko število celic je bilo izbrano na podlagi predhodne analize, s katero je bilo preverjeno zmanjševanje relativnega vpliva robnih pogojev na globalni odziv strukture.

Dobljene strukture so bile zavrtene za kot θ od 0° do 90° s korakom 10° glede na globalno smer obremenjevanja, kot je razvidno iz slike 1. Pri vseh orientacijah, so bile ohranjene enake zunanje mere, materialni parametri, relativni pomik in postopek nadaljnje analize.



Slika 1: Geometrija vbočene avksetične strukture

2.2 Numerični model

Numerični modeli so bili pripravljene in izračunani v programu PrePoMax, s pomočjo statične implicitne analize [12]. Osnovna avksetična struktura je bila modelirana kot površina ter nato zamrežena s paraboličnimi lupinskimi končnimi elementi tipa RNS, velikost končnih elementov je bila določena na podlagi predhodno izvedene konvergenčne analize. Le ta je

pokazala, da je ustrezna velikost končnih elementov enaka 0,25 mm. Za model je bila izbrana debelina 1 mm.

Osnovni material nosilne strukture je bil linearno elastični model jekla z modulom elastičnosti $E_s = 210000$ MPa in Poissonovim razmerjem $\nu_s = 0,28$. Pore avksetične strukture so bile zapolnjene z dodatnimi končnimi elementi, ki so omogočili spremljanje deformacije por, niso pa smeli spremeniti togosti strukture. Tako je bil kot material por (polnilni material) izbran linearen material z modulom elastičnosti $E_i = 1$ MPa in Poissonovim razmerjem $\nu_i = 0$. Razmerje med moduloma elastičnosti polnilnega in osnovnega materiala je znašalo $E_i/E_s = 4,76 \cdot 10^{-6}$, s čimer je bil izločen vpliv polnilnega materiala na nosilno strukturo.

Vozlišča nosilne strukture in navideznega polnila so bila na skupnih robovih združena. S tem je bila zagotovljena kinematična kompatibilnost pomikov, polnilni elementi pa so sledili deformiranju oboda posameznih por. Komponente deformacijskega tenzorja, pridobljene v polnilnem območju, so bile nato uporabljene za določanje prostorsko povprečenega odziva strukture.

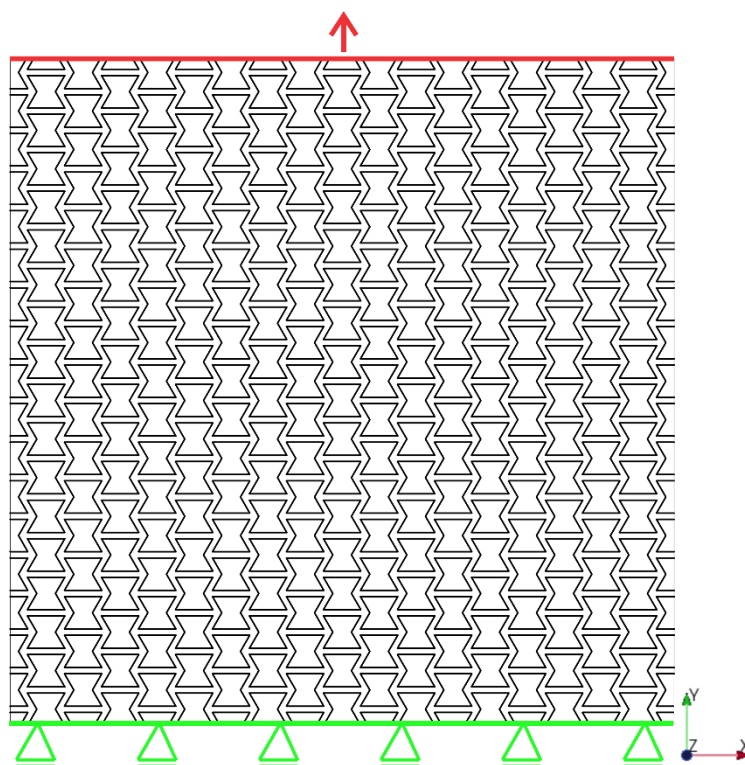
Kot drug način merjenja Poissonovega razmerja je bil izbran način s povprečenjem deformacijskega polja. Povprečenje je bilo izvedeno z dodatno pravokotno mrežo končnih elementov, ki je bila pritrjena na nosilno strukturo. Ta dodatna mreža končnih elementov je v nadaljevanju poimenovana navidezna merilna domena. Zamrežena je bila s štirikotnimi končnimi elementi drugega reda. Za navidezno merilno domeno je bil uporabljen isti linearno elastični material kot za navidezno polnilo, s čimer je bil tudi v tem primeru izločen njen vpliv na mehanski odziv nosilne strukture.

Mreža navidezne merilne domene je bila z mrežo osnovne avksetične strukture povezana z vezano povezavo (Tie). Vozlišča obeh mrež zato niso bila neposredno združena, kljub temu pa je bilo zagotovljeno, da je navidezna merilna domena sledila pomikom in deformiranju osnovne strukture. Takšen pristop je omogočal spremljanje deformacijskega polja na enotni merilni domeni, ki je prekrivala numerični model.

Pri analizi različnih orientacij se je spreminjal zasuk avksetične strukture, medtem ko je navidezna merilna domena ohranila nespremenjeno orientacijo. Njeni robovi so bili pri vseh obravnavanih primerih vzporedni z globalnima koordinatnima osema x in y. Deformacijski odziv različnih orientacij je bil tako vedno ovrednoten glede na isti globalni koordinatni sistem in na primerljivo merilno območje. Na navidezni merilni domeni so bile spremljane ter statistično obdelane izbrane komponente deformacijskega polja, iz katerih je bila določena primerjalna vrednost globalnega Poissonovega razmerja.

2.3 Robni pogoji in obremenitve

Začetna višina modela je znašala $H_0 = 100$ mm. Na zgornjem robu (rdeče označena mesta na sliki 2) je bil predpisan pomik $U_y = 10$ mm, kar ustreza nominalni vzdolžni deformaciji $\varepsilon_{y\text{nom}} = 0,1$. Na spodnjem robu (zeleno označena mesta na sliki 2) je bil preprečen pomik v smeri Y, pomik v smeri X pa je ostal prost, da je bilo omogočeno prečno deformiranje strukture. Vrednosti robnih pogojev so podane v tabeli 1. Rotacijske prostostne stopnje (UR) so bile ustrezno izbrane za RNS (ravninsko napetostno stanje).



Slika 2: Robni pogoji numeričnega modela

Tabela 1: Vrednosti robnih pogojev

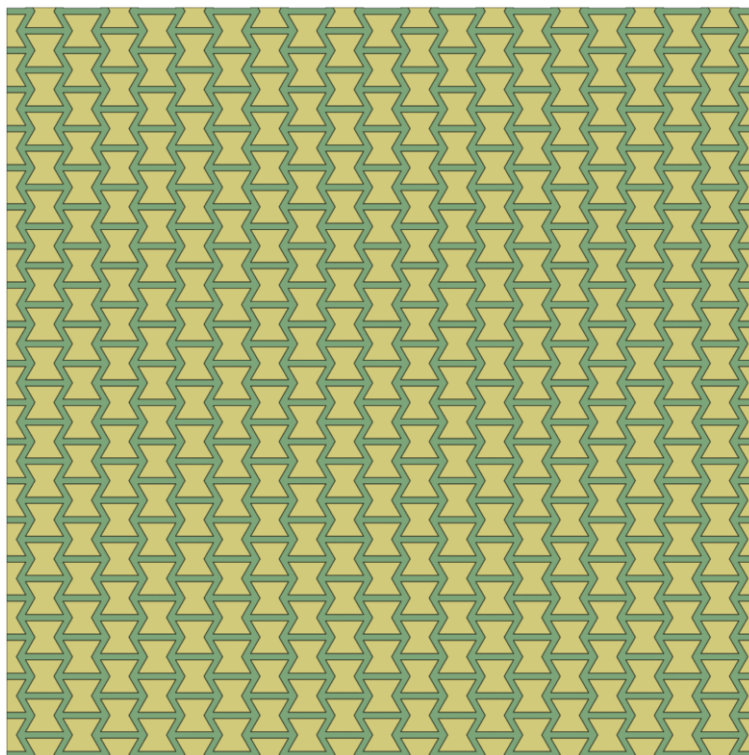
Robni pogoj	Spodnji rob [mm]	Zgornji rob [mm]
U_x	prosto	prosto
U_y	0	10
U_z	0	0
UR_x	0	0
UR_y	0	0
UR_z	prosto	prosto

2.4 Določitev Poissonovega razmerja

2.4.1 Integralno določanje Poissonovega razmerja

Za integralno določanje Poissonovega razmerja so bile pore avksetične strukture numerično zapolnjene z navideznim polnilom, opisanim v poglavju 2.2. Polnilo je tvorilo zvezno merilno domeno, ki je sledila deformiranju oboda posameznih por in omogočala spremljanje deformacijskega polja tudi v območjih, ki so pri modelu brez polnila prazna. Vloga polnila je bila izključno vzorčenje in prostorsko vrednotenje deformacij, ne pa povečanje togosti ali nosilnosti strukture.

Pri obremenjevanju v globalni smeri Y je bila vzdolžna deformacija določena s komponento ε_{yy} , prečna deformacija pa s komponento ε_{xx} deformacijskega tenzorja. Obe komponenti deformacijskega polja sta bili ovrednoteni znotraj izbrane integracijske domene, kot je vidno na sliki 3.



Slika 3: Struktura s polnilom

Pri obdelavi rezultatov je bil upoštevan prostorninski delež posameznega končnega elementa, zato so elementi k skupnemu rezultatu prispevali sorazmerno s svojo prostornino. Komponenti deformacijskega polja sta bili obravnavani ločeno in prostorsko povprečeni po celotni izbrani domeni [13]. Na podlagi tako določenih povprečnih vrednosti je bilo izračunano integralno globalno Poissonovo razmerje.

Vrednotenje je bilo izvedeno na ravni celotne obravnavane domene in ne z obravnavo lokalnih vrednosti posameznih elementov. Takšen pristop zmanjšuje vpliv lokalnih odstopanj, ki se lahko pojavijo zaradi rotacije povezav, strižnega deformiranja celic in zelo majhnih vrednosti posameznih komponent deformacije.

Ustrezna velikost analizirane domene je bila določena s postopnim vključevanjem dodatnega števila polnilnih celic. S tem je bilo mogoče spremljati prehod od lokalnega odziva posamezne pore do prostorsko povprečenega odziva večjega dela avksetične strukture.

2.4.2 Določanje Poissonovega razmerja iz pomikov

Za neodvisno primerjavo z integralnim pristopom je bilo globalno Poissonovo razmerje določeno tudi iz pomikov oziroma spremembe zunanjih dimenzij strukture. Pri vseh modelih

je bila sprememba zunanjih dimenzij spremljana s pomočjo vodoravnih merilnih linij na položajih $y = -25 \text{ mm}$, $y = 0 \text{ mm}$ in $y = 25 \text{ mm}$. Enaki položaji merilnih linij so bili uporabljeni pri vseh obravnavanih orientacijah, kar je omogočalo neposredno primerjavo rezultatov. Na posamezni liniji je bila sprememba širine določena iz vodoravnih pomikov na skrajni levi in desni strani strukture:

$$\Delta u = u_{x,R}(y_i) - u_{x,L}(y_i) \quad (1)$$

Prečna deformacija na izbrani višini je bila določena glede na začetno širino modela:

$$\varepsilon_x(y_i) = \frac{\Delta u}{u_0} \quad (2)$$

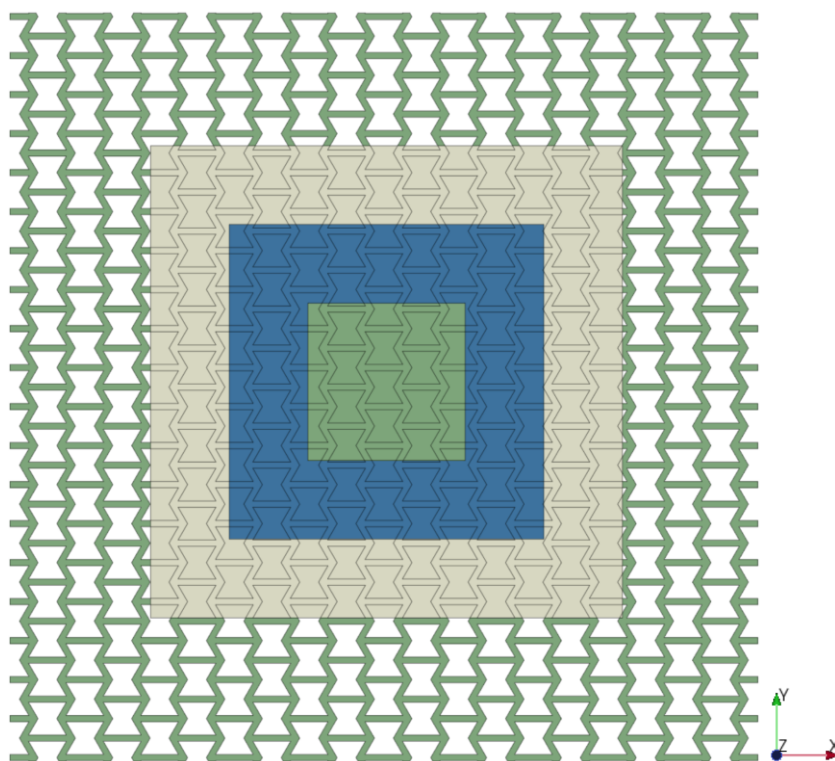
Globalno Poissonovo razmerje na posamezni merilni liniji je bilo nato izračunano na podlagi prečne in vzdolžne deformacije strukture.

$$\nu_{pom}(y_i) = -\frac{\varepsilon_x(y_i)}{\varepsilon_y(y_i)} \quad (3)$$

2.4.3 Navidezne merilne domene

Dodatno je bila izvedena analiza z navideznimi domenami, ki prekrivajo osnovno avksetično strukturo, kot je vidno na sliki 4. Za vsako navidezno merilno domeno se izračunata povprečni komponenti $\bar{\varepsilon}_{xx}$ in $\bar{\varepsilon}_{yy}$ ter globalno Poissonovo razmerje iz enačbe 4. Tako je mogoče analizirati prostorski odziv strukture in ločiti vpliv centralnega območja, prostih robov ter celic ob vpetju.

$$\nu_{int} = -\frac{\sum_{e=1}^N \int_{V_e} \varepsilon_{xx} dV}{\sum_{e=1}^N \int_{V_e} \varepsilon_{yy} dV} \quad (4)$$

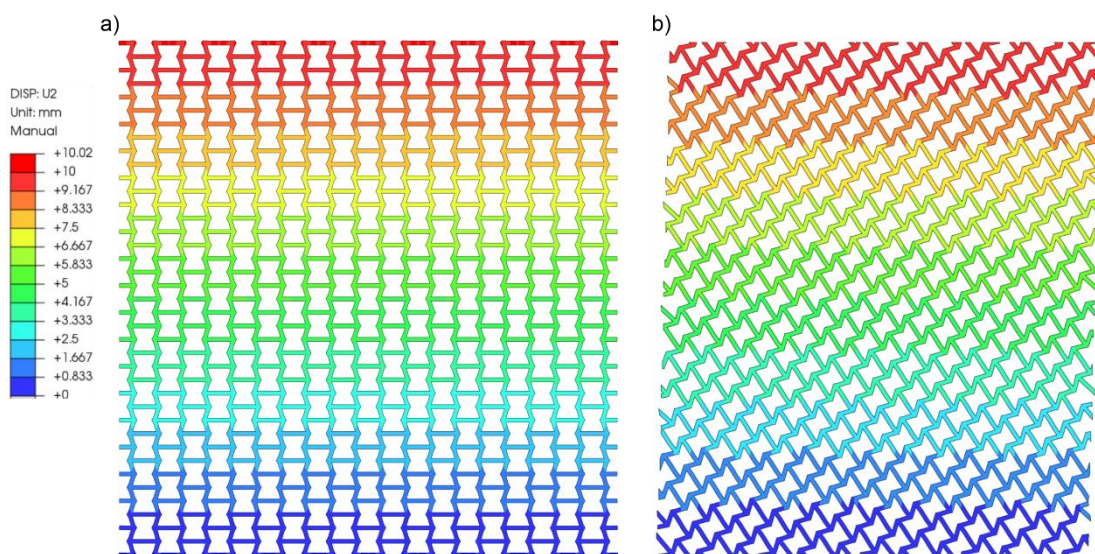


Slika 4: Avksetična struktura z navideznimi merilnimi domenami

3 Rezultati

3.1 Primerjava integralne metode in metode pomikov

Deformirani obliki strukture pri kotih zasuka 0° in 40° sta prikazani na slikah 5(a) in 5(b), pri čemer barvna lestvica prikazuje pomike v smeri Y, označene z U2. Pri obeh orientacijah je porazdelitev vzdolžnih pomikov po višini strukture podobna, saj vrednosti postopoma naraščajo od spodnjega proti zgornjemu robu. Razlika med primeroma se kaže predvsem v geometriji deformirane strukture in prečnem odzivu, kar se odraža tudi v različnih vrednostih globalnega Poissonovega razmerja.



Slika 5: Porazdelitev pomikov struktur U_2 : (a) brez zasuka $\theta = 0^\circ$, in (b) pri zasuku $\theta = 40^\circ$

Primerjava globalnega Poissonovega razmerja, določenega s tremi numeričnimi pristopi, je prikazana na sliki 6. Obravnavani so bili integralna metoda z navideznim polnilom, integralna metoda z navideznimi merilnimi domenami in metoda pomikov, ki temelji na spremembi zunanjih dimenzij strukture. Pri vseh pristopih so bile vrednosti določene za enake orientacije avksetične strukture, kar je omogočilo neposredno primerjavo njihovega odziva.

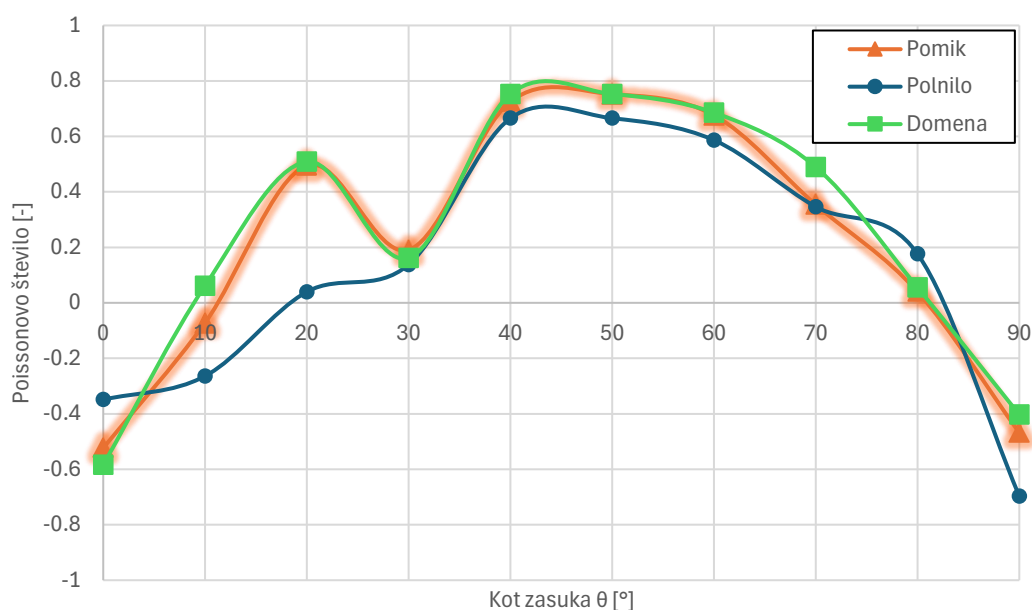
Rezultati kažejo, da vse tri metode v splošnem zaznajo podoben vpliv orientacije strukture na Poissonovo razmerje. Pri kotu zasuka med 10° in 20° se je avksetični odziv postopoma zmanjševal, Poissonovo razmerje pa je prešlo iz negativnega v pozitivno območje. Struktura v teh primerih ni več izkazovala avksetičnega obnašanja. Pri nadaljnjem povečevanju kota zasuka pozitivna vrednost Poissonovega razmerja narašča in doseže najvišjo vrednost pri kotu zasuka 45° . Takšen potek potrjuje izrazito smerno odvisnost deformacijskega mehanizma obravnavane geometrije.

Integralna metoda z navideznim polnilom upošteva deformacijsko stanje v porah strukture. Ker se posamezne pore pri deformiranju lokalno vrtijo, strižno deformirajo in neenakomerno odpirajo, se lahko tako določeni rezultati razlikujejo od globalnega odziva, pridobljenega iz pomikov zunanjih robov. Razlike so bile izrazitejšje predvsem pri orientacijah, pri katerih je bilo deformacijsko polje bolj nehomogeno.

Navidezne merilne domene so omogočile dodatno prostorsko povprečenje deformacijskega polja na območjih različnih velikosti. Manjše domene so bile bolj občutljive na lokalni odziv posameznih celic, medtem ko so večje domene zajele širši del strukture in zato podale bolj globalno oceno deformacijskega odziva. Ker so navidezne merilne domene pri vseh zasukih ostale poravnane z globalnima koordinatnima osema, so bile deformacijske komponente vedno vrednotene v istem koordinatnem sistemu. Uporabljene so bile tri kvadratne navidezne merilne domene z velikostmi 25 mm, 50 mm in 75 mm. Med njimi je najmanjša domena velikosti 25 mm podala vrednosti Poissonovega razmerja, ki so bile najbližje rezultatom, določenim iz pomikov.

V primerjavi z integralno metodo z navideznim polnilom so rezultati, dobljeni z navideznimi merilnimi domenami, praviloma pokazali boljše ujemanje z metodo pomikov. Razlog je v tem, da navidezne domene ne spremljajo le lokalnega deformiranja posameznih por, temveč povprečijo odziv večjega in enotno usmerjenega območja. S tem se zmanjša vpliv lokalnih rotacij, strižnih deformacij in drugih nehomogenosti deformacijskega polja.

Metoda pomikov se je izkazala kot primeren referenčni pristop za določanje globalnega odziva, saj neposredno temelji na spremembi zunanjih dimenzij strukture. Njena omejitev je občutljivost na izbiro merilnih mest in na vpliv robnih območij. Integralna metoda z navideznimi merilnimi domenami se je zato izkazala kot primernejša prostorska dopolnitev metode pomikov kot integralna metoda z navideznim polnilom.



Slika 6: Primerjava rezultatov Poissonovega razmerja v odvisnosti od zasuka

4 Zaključek

V prispevku je bila predstavljena numerična metodologija za določanje navideznega Poissonovega razmerja avksetičnih struktur z integralnim vrednotenjem deformacijskega polja, analizo pomikov in uporabo navidezne merilne domene. Rezultati so pokazali izrazit vpliv orientacije strukture, saj je Poissonovo razmerje pri določenih zasukih prešlo iz negativnega v pozitivno območje.

Primerjava metod je pokazala, da izbira merilne domene pomembno vpliva na dobljeno vrednost. Metoda z navidezno merilno domeno je praviloma dosegla boljše ujemanje z metodo pomikov kot integralni pristop z navideznim polnilom. Predstavljeni postopek je mogoče v nadaljevanju uporabiti tudi za druge avksetične geometrije.

5 Literatura

- [1] R. Lakes, *Foam Structures with a Negative Poisson's Ratio*, Science 235, 1038–1040, 1987.
- [2] N. Novak, M. Vesenjaj, Z. Ren, *Auxetic cellular materials - A review*, Strojnicki Vestnik/Journal of Mechanical Engineering 62, 485–493, 2016.
- [3] J.N. Grima, K.E. Evans, *Auxetic behavior from rotating squares*, J. Mater. Sci. Lett. 19, 1563–1565, 2000.
- [4] J.N. Grima, K.E. Evans, *Auxetic behavior from rotating triangles*, J. Mater. Sci. 41, 3193–3196, 2006.
- [5] I.G. Masters, K.E. Evans, *Models for the elastic deformation of honeycombs*, Compos. Struct. 35, 403–422, 1996.
- [6] N. Novak, L. Biasetto, P. Rebesan, F. Zanini, S. Carmignato, L. Krstulović-Opara, et al., *Experimental and computational evaluation of tensile properties of additively manufactured hexa- and tetrachiral auxetic cellular structures*, Addit. Manuf. 45, 102022, 2021.
- [7] A. Alomarah, D. Ruan, S. Masood, *Tensile properties of an auxetic structure with re-entrant and chiral features—a finite element study*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology 2018 99:9 99, 2425–2440, 2018.
- [8] A. Bacigalupo, L. Gambarotta, *Homogenization of periodic hexa- and tetrachiral cellular solids*, Compos. Struct. 116, 461–476, 2014.
- [9] D. Atilla Yolcu, B. Okutan Baba, *Measurement of Poisson's ratio of the auxetic structure*, Measurement 204, 112040, 2022.
- [10] F. Scarpa, P. Panayiotou, G. Tomlinson, *Numerical and experimental uniaxial loading on in-plane auxetic honeycombs*, Journal of Strain Analysis for Engineering Design 35, 383–388, 2000.
- [11] C. Coulais, C. Kettenis, M. Van Hecke, *A characteristic length scale causes anomalous size effects and boundary programmability in mechanical metamaterials*, Nature Physics 2017 14:1 14, 40–44, 2017.
- [12] PrePoMax, <https://prepomax.fs.um.si/>.
- [13] V. Kouznetsova, W.A.M. Brekelmans, F.P.T. Baaijens, *Approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials*, Comput. Mech. 27, 37–48, 2001.



Zasnova pacientu prilagojene nepokrite žilne opornice na podlagi geometrijske karakterizacije aorte

Žiga Donik¹, Filip Jerenec¹

Design of a patient-specific bare metal stent based on geometric characterization of the aorta

Povzetek. Predstavljena je metodologija za določitev radialne togosti segmentov nepokrite žilne opornice, kar omogoča pacientu prilagojeno znotrajžilno oskrbo disekcije aortnega loka. Na podlagi pacientu specifičnega modela aorte je bila vzdolž srednjice opravljena geometrijska karakterizacija prave in lažne svetline z analizo njunih prečnih presekov. Iz razmerja med površino prave in skupne svetline je bil določen geometrijski parameter, ki je bil preslikan v premer žice posameznih podpor-nih obročev, pri čemer je osnovna geometrija opornice ostala nespremenjena. Virtualna vstavitev v pacientu specifični model aorte je pokazala večji pomik intimalne lehe in učinkovitejšo razširitev prave svetline v primerjavi z referenčno opornico.

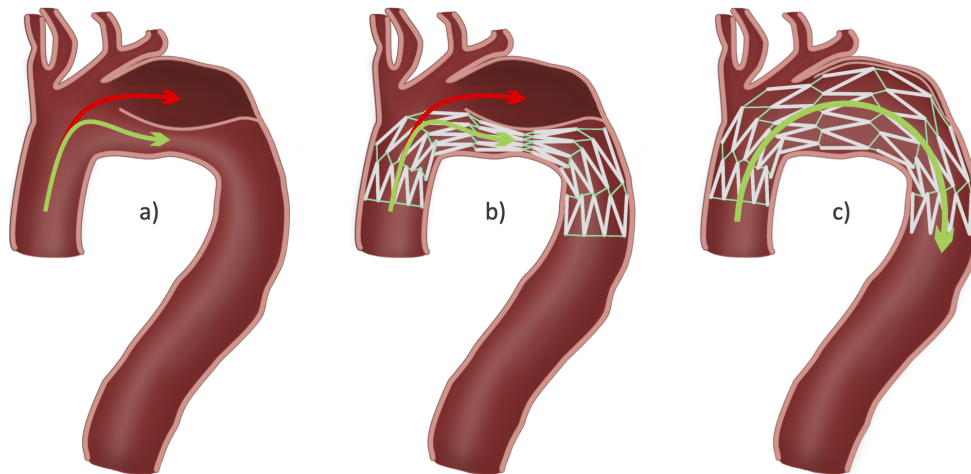
Abstract. A methodology for determining the radial stiffness of segments of a bare metal stent is presented, enabling patient-specific endovascular treatment of aortic arch dissection. A patient-specific aortic model was geometrically characterized by evaluating true- and false-lumen cross-sectional areas along the centerline. A geometric parameter derived from the ratio between true-lumen and total-lumen area was mapped to the wire diameter of individual supporting rings while preserving the baseline stent geometry. Virtual deployment in a patient-specific aortic model demonstrated increased intimal flap displacement and more effective true-lumen expansion compared with the reference stent.

1 Uvod

Disekcija aorte je življenjsko nevarno stanje, pri katerem pride do razpoke in razlojitve žilne stene ter posledično do ločitve svetline na pravo (angl. *true lumen*, TL) in lažno (angl. *false lumen*, FL), ki ju loči intimalna leha. Če pride do širjenja aorte in povišanja tlaka v lažni svetlini, lahko pride do rupture aorte, ki ni združljiva z življenjem. Disekcija aortnega loka je posebej zahtevna za zdravljenje, saj je potrebno povrniti krvni pretok v pravi svetlini, ne da

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

bi pri tem ogrozili prekrvavitev vej aortnega loka. Po operativni oskrbi akutne disekcije tipa I (sem sodijo disekcije aortnega loka) lahko v distalnem delu ostane prehodna lažna svetlina, ki je povezana s poznejšim širjenjem aorte in potrebo po dodatnem posegu [7]. Pokrita znotrajžilna opornica lahko FL izključi iz krvnega obtoka, vendar lahko zahteva rekonstrukcijo oziroma obvodno operacijo na vejah aortnega loka, kar predstavlja invaziven poseg, ki se jim želimo z znotrajžilnimi metodami izogniti. Nepokrita kovinska žilna opornica (angl. *bare metal stent*, BMS) je zato zanimiva alternativa, saj lahko podpre TL in hkrati ohrani prekrvavitev vej [4].



Slika 1: Načelo zdravljenja disekcije aortnega loka z BMS; a) Disekcija razdeli svetlino na TL in FL, ki sta ločena z intimalno leho. Pretok skozi TL je označen z zeleno puščico, pretok skozi FL pa z rdečo. b) Razširitev TL s pomočjo žilne opornice podpira pomik intimalne lehe proti aortni steni in lahko prispeva k zmanjšanju tlaka v FL ter trombozi, ki bi FL zaprla. Na delih večjih zožitev TL je potrebna večja radialna togost opornice, da zagotovi ustrezno podporo oziroma pomik intimalne lehe proti steni aorte. c) Takšen postopek bi lahko zagotovil ustrezno povrnitev pretoka skozi TL brez oviranja pretoka skozi veje aortnega loka.

V predhodnem delu smo razvili numerični model virtualne vstavitve komercialne nepokrite žilne opornice v aorto posameznega pacienta [6]. Model je vključeval izdelavo 3D geometrijskega modela aorte, prilagojenega posameznemu pacientu, na podlagi segmentacije računalniške tomografske angiografije. Izdelan je bil numerični model žilne opornice ter razvit *in silico* postopek stiskanja in pozicioniranja opornice. Določen je bil ustrezen stik med opornico, intimalno leho in aortno steno. Po virtualni vstavitvi se je deformacija opornice kakovostno ujemala s fluoroskopskim posnetkom med posegom. Razširjena analiza po metodi končnih elementov in z računalniško dinamiko tekočin je pozneje pokazala, da BMS ugodno vpliva na geometrijo svetlin in hemodinamiko, vendar je pomik intimalne lehe močno odvisen od njene togosti [5]. Pri višjih togostih intimalne lehe, ki je lahko povezana s kroničnimi disekcijami, standardna komercialna opornica ne razvije zadostne radialne sile za popoln pomik intimalne lehe proti aortni steni in s tem razširitve TL ter zaprtje in znižanje tlaka v FL.

Ta ugotovitev je neposredna motivacija za delo predstavljeno v tem prispevku. Enakomerno povečanje togosti celotne opornice bi po nepotrebnem povečalo togost tudi v odsekih, kjer ni

prisotna aortna disekcija in se svetlina ne deli na pravo in lažno. Tam dodatna razširitev nepri-zadetega dela aorte ni zaželjena. Dodatno bi višja togost dela opornice, ki je nameščen izven prizadetega dela aorte, lahko poslabšalo prilagodljivost naprave v ukrivljenem aortnem loku. Dodatna radialna podpora je potrebna predvsem tam, kjer intimalna leha najbolj zoži TL, zato je smiselno togost prilagoditi po dolžini opornice. Za določitev mest prilagoditve je zato najprej potrebna ustrezna kvantitativna karakterizacija lumna vzdolž predvidenega območja vstavitve.

Cilj tega dela je razviti metodologijo za določitev potrebne lokalne podpore, prilagojene posameznemu pacientu. Prilagoditev radialne togosti opornice je dosežena s spreminjanjem premera žice posameznega podpornega obroča žilne opornice. Tak pristop je konstrukcijsko in izdelovalno enostaven ter zmanjšuje tveganje nestabilnosti in poškodb žile zaradi velikih razlik med premeri sosednjih obročev.

2 Metode

2.1 Pacientu specifičen model in virtualna vstavitev

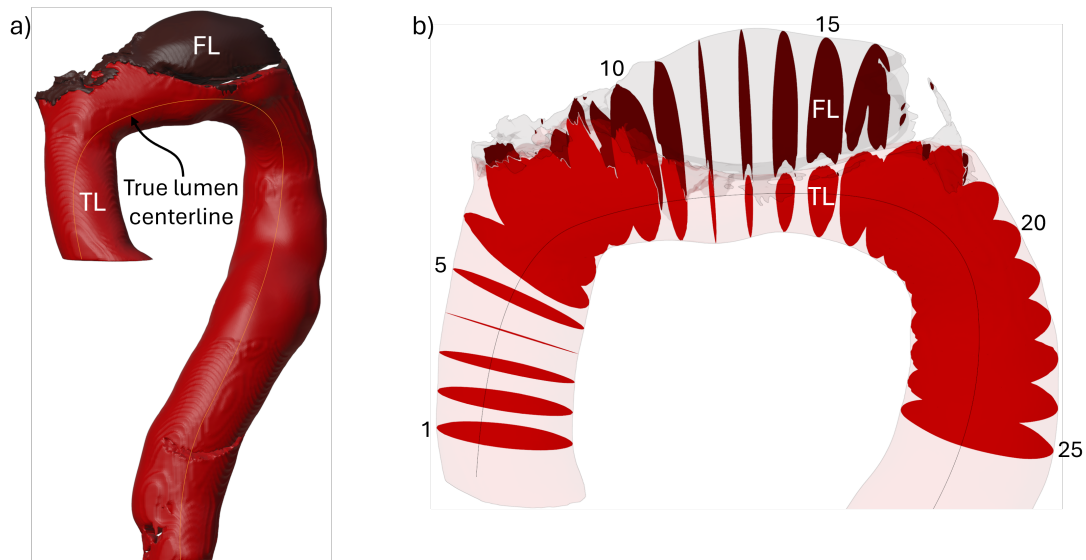
Pacientu specifični 3D geometrijski model aorte je bil izdelan s segmentacijo na podlagi slik računalniške tomografske angiografije. Prava in lažna svetlina sta bili segmentirani ločeno, prostor med njima pa je predstavljal intimalno leho. Aortna stena in intimalna leha sta bili diskretizirani s tetraedriskimi končnimi elementi. Kot referenčna opornica je bil uporabljen že razviti numerični model komercialne BMS opornice. Kovinska žica podpornih obročev žilne opornice je bila modelirana z linijskimi končnimi elementi. Povezovalni šivi, ki združujejo podporne obroče, pa z diskretnimi vzmetnimi elementi z nelinearno karakteristiko vzmeti. Vzmeti so imele visoko togost v natezni smeri ter zanemarljivo togost v tlačni smeri, kar je skladno z obnašanjem vrvi in niti, ki niso sposobne prenosa tlačnih obremenitev, saj se zgodaj pojavi uklon. Zaporedje virtualne vstavitve žilne opornice je obsegalo stiskanje opornice na najmanjši premer TL, pozicioniranje vzdolž srednjice TL in razširjanje po sprostitvi stiskalnega orodja v obliki cevi.

Aortni steni je bil pripisan izotropni hiperelastični materialni model Vorp–Raghavan s parametri iz literature [1]. Intimalni lehi je mogoče predpisati neodvisno togost; za klinično zahtevni referenčni primer ima ta enake materialne parametre kot aortna stena. Pri kroničnih disekcijah je namreč intimalna leha bolj toga kot v akutni fazi. Kontaktna definicije med opornico, intimalno leho in aortno steno so bile opisane s pomočjo t.i. "mortar" kontaktnih algoritmov, na enak način kot v predhodnih študijah [5, 6]. Tako definiran numerični model omogoča neposredno primerjavo standardne in personalizirane opornice pri enakih robnih pogojih. Ker je postopek izdelave tridimenzionalnega modela podrobneje predstavljen v predhodnih prispevkih [5, 6], je v nadaljevanju poudarek na geometrijski karakterizaciji aorte in svetline.

2.2 Geometrijska karakterizacija svetline

Za geometrijsko analizo so bile veje aortnega loka odstranjene iz geometrijskega modela. Analiza je bila opravljena v odprtokodnem programu Blender [3] s pomočjo Python skripte. Na podlagi 3D modela pacientove aorte sta bila ustvarjena ločena volumna za pravo in lažno svetlino, kot je prikazano na sliki 2a. Določena je bila srednjica prave svetline, ki se uporablja pri algoritmu za ustrezno namestitev žilne opornice. Na delu srednjice, ki je ustrezal dolžini

opornice, je bilo ustvarjenih 25 prereznih ravnin, ki so bile ekvidistančno razporejene po predvidenem območju vstavitve opornice. Ravnine so bile usmerjene normalno na lokalno tangento srednjice. Z Boolovim presekom prerezne ravnine in volumnov TL in FL so bili določeni pari prerezov TL in FL, ki so vidni na sliki 2b.

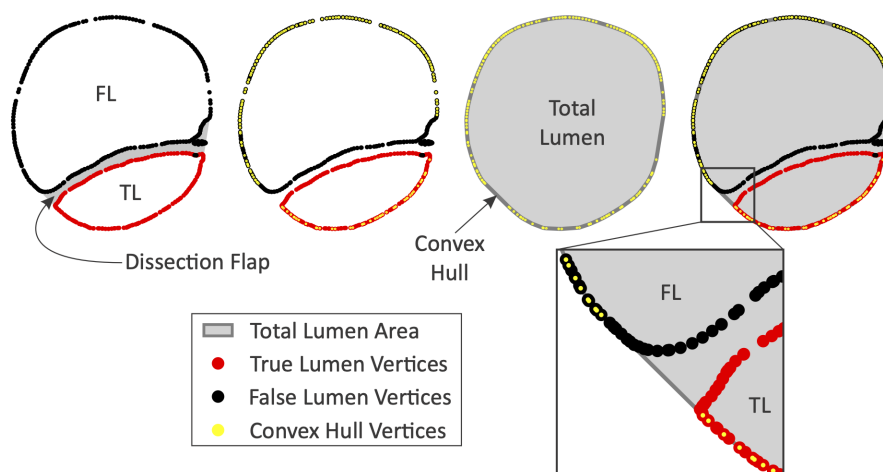


Slika 2: Karakterizacija svetline pacientu specifične aorte; a) V modelu aorte sta ločeno obravnavani prava (rdeče) in lažna (temno rdeče) svetlina iz katerih sta ustvarjena volumska objekta v programu Blender. Izločena je tudi srednjica prave svetline (TL). b) Vzdolž srednjice v območju opornice je ustvarjenih 25 ekvidistančnih presečnih ravnin, s katerimi so izračunane površine TL, FL in skupne svetline.

Intimalna leha predstavlja v tem primeru prazen prostor med TL in FL, zato skupne površine svetline v posameznem prerezu ni mogoče neposredno odčitati iz enega samega objekta. Za vsak par prerezov TL in FL je bila skupna meja določena z algoritmom konveksne ovojnice (angl. *convex hull*). Uporabljen algoritem qhull [2] določi najmanjši konveksni poligon, ki vsebuje vse robne točke prerezov TL in FL. Tako rekonstruirana zunanja meja je tako približek skupne svetline, ki je na obravnavanem delu aorte pretežno konveksna. Postopek je prikazan na sliki 3, kjer rdeče in črne točke pripadajo meji prerezov TL in FL, rumene točke pa določajo konveksno ovojnico. Površina poligona konveksne ovojnice predstavlja skupno površino lumna na presečni ravnini $A_{\text{tot}}(s)$, površina prave svetline na presečni ravnini pa je označena z $A_{\text{TL}}(s)$. Na podlagi določenih geometrijskih parametrov je lokalna potreba po radialni podpori opisana s funkcijo

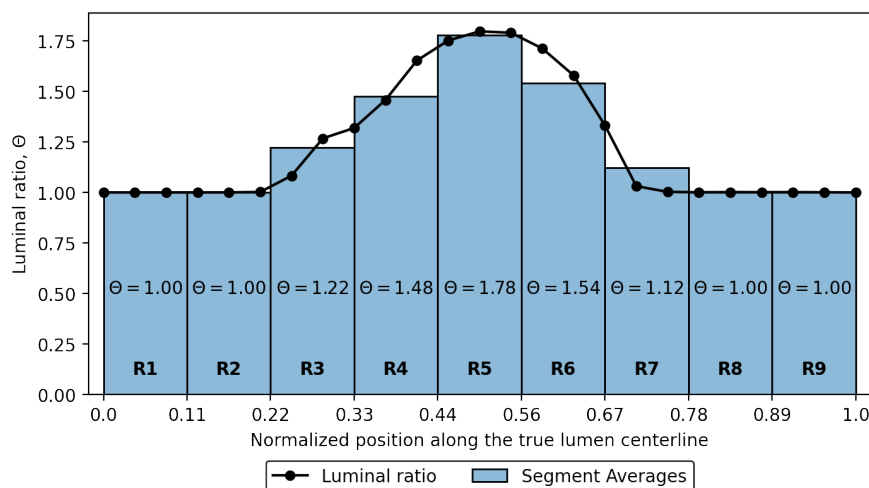
$$\Theta(s) = 2 - \frac{A_{\text{TL}}(s)}{A_{\text{tot}}(s)}, \quad (1)$$

ki definira razmerje med površino prave svetline in skupno površino svetline in predstavlja glavni parameter za določitev lokalne spremembe v togosti podpornih obročev opornice.



Slika 3: Določitev skupne površine svetline s konveksno ovojnico. Robne točke prereзов TL in FL so prikazane rdeče in črno, točke konveksne ovojnice pa rumeno. Siva površina predstavlja skupno površino svetline A_{tot} .

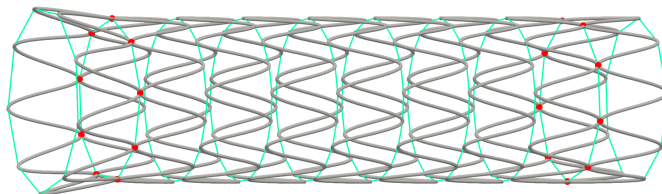
V nespremenjenem delu aorte je $\Theta = 1$, večje vrednosti pa označujejo odseke, v katerih TL zavzema manjši delež skupne svetline. Geometrijski pokazatelj zato predstavlja lokalne zožitve in ne neposredne meritve sile, potrebne za pomik membrane. Graf funkcije Θ vzdolž predvidenega območja vstavitve je prikazan na sliki 4. Za določitev premera žice posameznega obroča je funkcija Θ povprečena po dolžini posameznega obroča, kjer je funkcija $\bar{\Theta}_i$ definirana za vsak obroč podporni obroč žilne opornice R_i .



Slika 4: Primer funkcije Θ vzdolž območja opornice. Črne točke predstavljajo vrednosti razmerja svetlin v presečnih ravninah. Povprečja po odsekih (modri stolpci) glede na dolžino podpornega obroča so vhodni podatki za določitev premera žice posameznega obroča R1-R9.

2.3 Preslikava anatomije v togost opornice

Referenčna opornica, prikazana na sliki 5, ima devet podpornih obročev z enakim premerom žice d_0 . Pri personalizirani izvedbi ostanejo premer in širina obročev, število vrhov ter topologija povezovalnih šivov nespremenjeni. Spreminja se le premer žice d_i posameznega obroča i .



Slika 5: Numerični model komercialne nepokrite žilne opornice z devetimi podpornimi obročmi. Premer žice referenčne opornice je enak za vse obroče in znaša 0,5 mm.

Za preslikavo anatomskih karakteristik v premer žice posameznega obroča je uporabljena preprosta linearna preslikava

$$d_i = d_0 \cdot \bar{\Theta}_i, \quad (2)$$

kjer je d_i premer žice i -tega obroča, d_0 osnovni premer žice komercialne žilne opornice, $\bar{\Theta}_i$ pa povprečna vrednost razmerja svetline za obroč i na območju aorte v obsegu dolžine obroča. V tabeli 1 je prikazana porazdelitev povprečne funkcije $\bar{\Theta}$ ter premer žice d_i za posamezen obroč žilne opornice, kjer je osnovni premer žice komercialne žilne opornice $d_0 = 0,5$ mm.

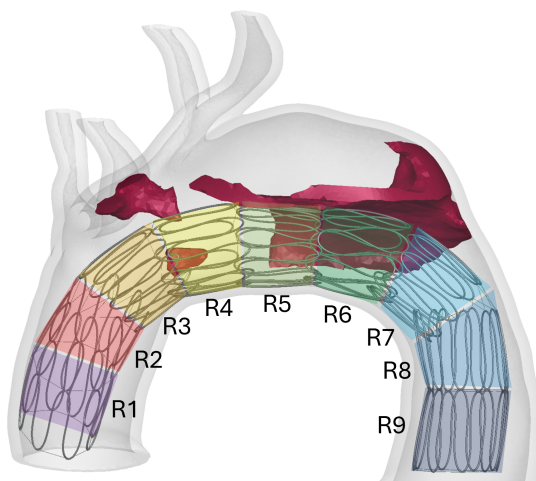
Tabela 1: Porazdelitev povprečne funkcije $\bar{\Theta}$ ter premer žice d_i za posamezen obroč žilne opornice.

Obroč	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9
$\bar{\Theta}_i$	1,00	1,00	1,22	1,48	1,78	1,54	1,12	1,00	1,00
d_i / mm	0,50	0,50	0,61	0,74	0,89	0,77	0,56	0,50	0,50

Povečanje premera žice pri sicer nespremenjenem obroču poveča njegovo upogibno in radialno togost, pri tem pa ohrani ovojnico referenčne opornice ter dolžine šivov. Personalizirana opornica je bila virtualno vstavljena v isti model aorte kot referenčna komercialna opornica. Položaj obročev pri vstavljanju opornice je prikazan na sliki 6.

3 Rezultati in razprava

Geometrijska analiza je pokazala, da je lokalizirano območje izrazite zožitve TL približno na sredini predvidenega območja vstavitve (slika 4). Predlagana preslikava zato poveča premer žice le pri ustreznih podpornih obročih, medtem ko proksimalni (R1 in R2) in distalni (R8 in R9) obroči ohranijo referenčni premer. Tako nastane zvezna, z anatomijo določena porazdelitev radialne togosti podpornih obročev namesto enakomerno ojačane opornice.



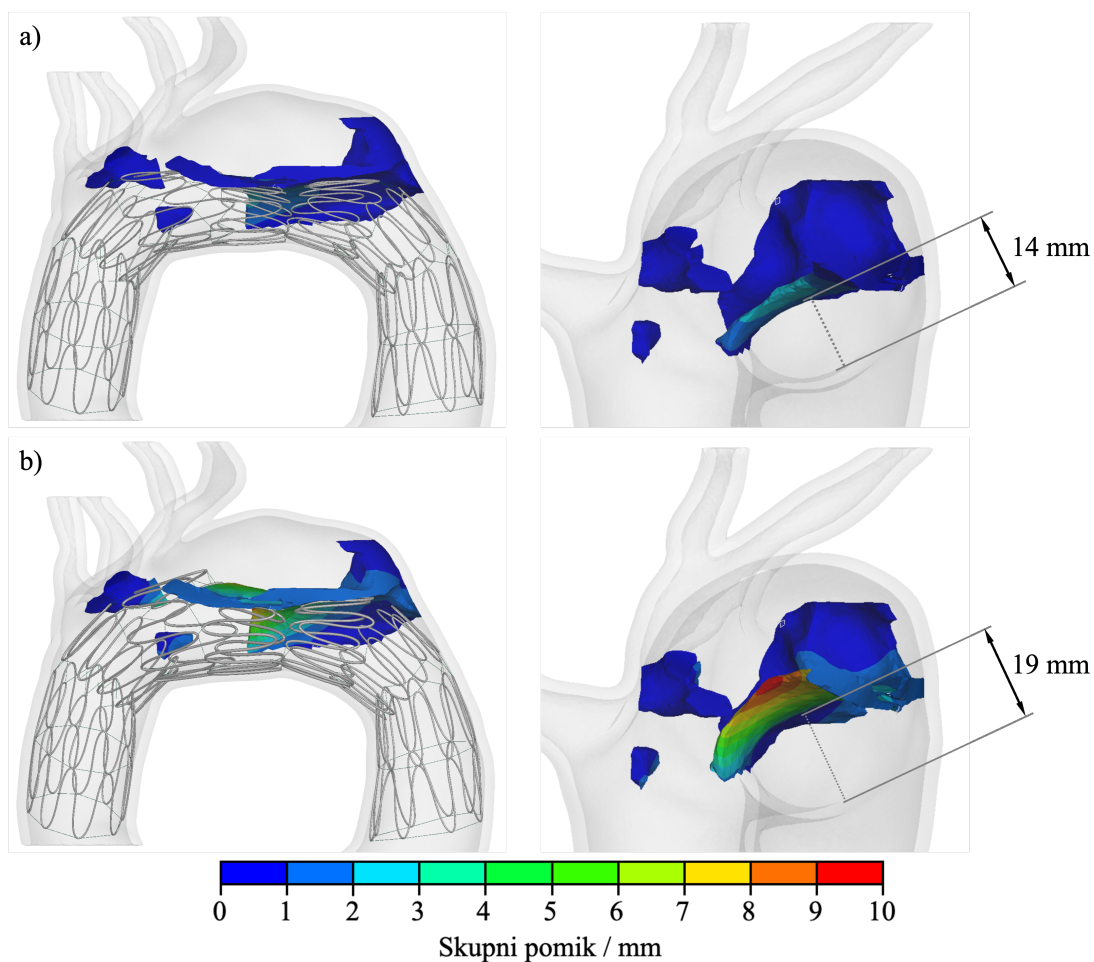
Slika 6: Položaji podpornih obročev R1–R9 pri virtualni vstavitvi opornice.

Rezultati virtualne vstavitve standardne in personalizirane opornice so prikazani na sliki 7. Pri obeh simulacijah so bili uporabljeni enaki robni pogoji, materialni modeli in postopek vstavitve, zato je edina razlika med primeroma porazdelitev premera žice posameznih podpornih obročev. Primerjava pokaže, da personalizirana opornica učinkoviteje podpira pravo svetlino in povzroči večji pomik intimalne lehe proti aortni steni. Posledično se poveča odprtost prave svetline na najbolj kritičnem delu disekcije, iz česar v skladu z rezultati predhodne raziskave [5] sledi zmanjšanje tlaka v lažni svetlini in normalizacija pretoka v pravi svetlini.

Pri referenčni opornici znaša največja dosežena odprtina med intimalno leho in aortno steno približno 14 mm, medtem ko personalizirana opornica doseže približno 19 mm. Dosežena razširitev je primerljiva z rezultati predhodne raziskave [5, 6], kjer je bila enaka komercialna opornica vstavljena v model z desetkrat manj togo intimalno leho (10 % togosti aortne stene), pri čemer je bila dosežena odprtina približno 18 mm. To pomeni, da lahko lokalno povečanje radialne togosti opornice pomembno izboljša mehanski učinek tudi pri bistveno bolj togi intimalni lehi, ki predstavlja disekcijo v kronični fazi.

Rezultati potrjujejo osnovno hipotezo predlagane metodologije, da je mogoče geometrijsko karakterizacijo svetline neposredno uporabiti za določitev lokalne radialne togosti podpornih obročev. Čeprav je bila v tej raziskavi uporabljena zgolj preprosta linearna preslikava geometrijskega parametra Θ v premer žice posameznega obroča, že takšna začetna izbira vodi do opaznega izboljšanja pomika intimalne lehe glede na standardno izvedbo opornice. To kaže, da geometrijska karakterizacija ustrezno identificira območja, kjer je potrebna večja mehanska podpora.

Glavna prednost predlaganega pristopa je, da omogoča ciljno povečanje radialne togosti le na anatomske mestih, kjer je to potrebno, pri tem pa ohrani osnovno geometrijo komercialne opornice. Ker se spreminja zgolj premer žice posameznih podpornih obročev, ostanejo premer opornice, njena dolžina in razporeditev povezovalnih šivov nespremenjeni, kar zmanjšuje možnost geometrijskih nestabilnosti med vstavitvijo. Poleg tega, lahko na ta način ostale komponente sistema za vstavljanje opornice (kateter, stiskalno orodje) ostanejo nespremenjene, kar



Slika 7: Primerjava virtualne vstavitve referenčne (a) in personalizirane (b) žilne opornice. V obeh simulacijah so uporabljeni enaki robni pogoji, materialni modeli in postopek vstavitve; edina razlika je lokalno prilagojen premer žice posameznih podpornih obročev pri personalizirani opornici. Večja radialna togost v območju največje zožitve povzroči izrazitejši pomik intimalne lehe in večjo razširitev prave svetline.

poenostavi razvoj in proizvodnjo personalizirane opornice.

4 Zaključek

V prispevku je predstavljena metodologija za pacientu prilagojeno določitev lokalne radialne togosti nepokrite žilne opornice za zdravljenje disekcije aortnega loka. Metodologija temelji na geometrijski karakterizaciji prave in lažne svetline vzdolž aorte ter neposredni preslikavi razmerja med njunima površinama v premer žice posameznih podpornih obročev. Pri tem ostanejo osnovna geometrija opornice, premer podpornih obročev in sistem za vstavljanje nespremenjeni.

Rezultati virtualne vstavitve so pokazali, da že preprosta linearna preslikava geometrijskega parametra omogoča opazno večji pomik intimalne lehe in učinkovitejšo razširitev prave svetline v primerjavi s standardno komercialno opornico. S tem je bila potrjena osnovna hipoteza, da geometrijska karakterizacija svetline predstavlja primeren pokazatelj za določitev mest, kjer je potrebna večja lokalna radialna podpora.

Predlagana metodologija predstavlja prvi korak k popolnoma pacientu prilagojeni zasnovi nepokritih žilnih opornic. Uporabljena linearna preslikava geometrijskega parametra Θ v premer žice predstavlja predvsem dokaz koncepta, zato bo nadaljnje delo usmerjeno v razvoj in optimizacijo naprednejših preslikav med geometrijo svetline in lokalno radialno togostjo opornice ter njihovo ovrednotenje na večjem številu pacientu specifičnih modelov. Poleg prilagoditve premera žice bo v prihodnje smiselno raziskati tudi vpliv drugih konstrukcijskih parametrov, kot sta premer podpornih obročev in njihova geometrija.

Zahvala

Avtorja se zahvaljujeta Javni agenciji za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije za sofinanciranje raziskovalnega programa P2-0063 ter projekta J7-60120.

Literatura

- [1] E. Abbott, S. Dhara, K. Khabaz, S. Sankary, K. Cao, N. Nguyen, T. Babrowski, L. Pocivavsek, and R. Milner. Computational analysis of endovascular aortic repair proximal seal zone preservation with endoanchors: A case study in cylindrical neck anatomy. *JVS-Vascular Science*, 2:170–178, 2021.
- [2] C. B. Barber, D. P. Dobkin, and H. Huhdanpaa. The quickhull algorithm for convex hulls. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22(4):469–483, December 1996.
- [3] Blender Online Community. *Blender - a 3D modelling and rendering package*. Blender Foundation, Stichting Blender Foundation, Amsterdam, 2018.
- [4] L. Di Tommaso, R. Giordano, E. Di Tommaso, G. Di Palo, and G. Iannelli. Treatment with transfemoral bare-metal stent of residual aortic arch dissection after surgical repair of acute type an aortic dissection. *Journal of Thoracic Disease*, 10(11):6097–6106, November 2018.
- [5] Ž. Donik, S. Dhara, W. Li, B. Nnate, S. Sankary, K. Polcari, M. A. Varsanik, K. Khabaz, R. Milner, N. Nguyen, J. Kramberger, and L. Pocivavsek. Bare metal stenting for residual arch dissections: A computational analysis. *Cardiovascular Engineering and Technology*, 16(6):624–640, 2025.
- [6] Ž. Donik, S. Sankary, L. Pocivavsek, and J. Kramberger. Računalniška simulacija vstavljanja kovinske žilne opornice za zdravljenje disekcije v aortnem loku. In J. Slavič and M. Česnik, editors, *Kuhljevi dnevi 2023: zbornik del*, Bled, Slovenia, Sept. 2023.
- [7] A. M. Vekstein, J. W. Doberne, E. H. Weissler, C. M. Wojnarski, C. A. Long, A. R. Williams, R. P. Plichta, J. G. Gaca, and G. Chad Hughes. Tailored approach and outcomes of aortic arch reconstruction after acute type A dissection repair. *The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery*, 166(4):996–1008.e1, October 2023.



Numerično modeliranje gumenih kompozitov s kontinuirnimi vlakni

Žiga Donik¹, Srečko Glodež¹, Janez Kramberger¹, Tadeusz Łagoda², Jernej Klemenc³

Computational modeling of continuous fiber reinforced rubber composites

Povzetek. V prispevku je predstavljen eksperimentalni in numerični pristop za analizo mehanskega odziva gumenih kompozitov, ojačanih z neprekinjenimi najlonskimi vlakni. Na podlagi nateznih preizkusov gumene matrice in ojačitvenih vlaken je bil razvit model po metodi končnih elementov v programskem okolju ANSYS MAPDL. Gumena matrica je bila modelirana s hiperelastičnim materialnim modelom Blatz–Ko, vlakna pa z diskretnimi ojačitvenimi elementi REINF264. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov za različni orientaciji vlaken ter različno število ojačitvenih slojev je pokazala dobro ujemanje globalnega mehanskega odziva kompozita. Razviti model predstavlja računsko učinkovito osnovo za nadaljnje analize poškodb in utrujanja zvezno ojačanih gumenih kompozitov.

Abstract. This paper presents an experimental and numerical approach for analyzing the mechanical response of rubber composites reinforced with continuous nylon fibers. Based on uniaxial tensile tests of the rubber matrix and reinforcing fibers, a finite element model was developed in ANSYS MAPDL. The rubber matrix was described using the Blatz–Ko hyperelastic material model, while the reinforcing fibers were modeled using discrete REINF264 reinforcement elements. Comparison of numerical and experimental results for different fiber orientations and numbers of reinforcement layers showed good agreement in the global mechanical response of the composite. The developed model provides a computationally efficient basis for future investigations of damage and fatigue in continuously reinforced rubber composites.

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² Opole University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering

³ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo

1 Uvod

Gumeni kompoziti, ojačani z neprekinjenimi vlakni, predstavljajo pomembno skupino konstrukcijskih materialov, ki združujejo veliko deformabilnost gumene matrice z visoko nosilnostjo in togostjo ojačitvenih vlaken. Zaradi ugodnega razmerja med prožnostjo, nosilnostjo in utrujenostno odpornostjo se pogosto uporabljajo v pnevmatikah, transportnih trakovih, gibkih ceveh ter zračnih vzmeteh, kjer so izpostavljeni velikim deformacijam in kompleksnim obremenitvenim stanjem [4, 6, 9].

Mehanski odziv takšnih kompozitov je odvisen od nelinearnega obnašanja gumene matrice, mehanskih lastnosti ojačitvenih vlaken ter njihove medsebojne interakcije. Poleg materialnih lastnosti imajo pomemben vpliv tudi orientacija vlaken, število ojačitvenih slojev in njihova razporeditev znotraj kompozita, saj neposredno določajo togost, porazdelitev napetosti in način prenosa obremenitve [5, 7, 8].

Numerično modeliranje gumenih kompozitov predstavlja zaradi velikih deformacij in izrazite materialne nelinearnosti poseben izziv. Podrobni modeli, pri katerih so posamezna vlakna modelirana s tridimenzionalnimi volumskimi elementi, omogočajo natančno analizo lokalnega napetostnega stanja, vendar postanejo pri večjih modelih računsko zelo zahtevni. Zato se v praksi pogosto uporabljajo poenostavljeni modeli z diskretnimi ojačitvenimi elementi, ki omogočajo dobro ravnovesje med natančnostjo in računsko učinkovitostjo [1, 7].

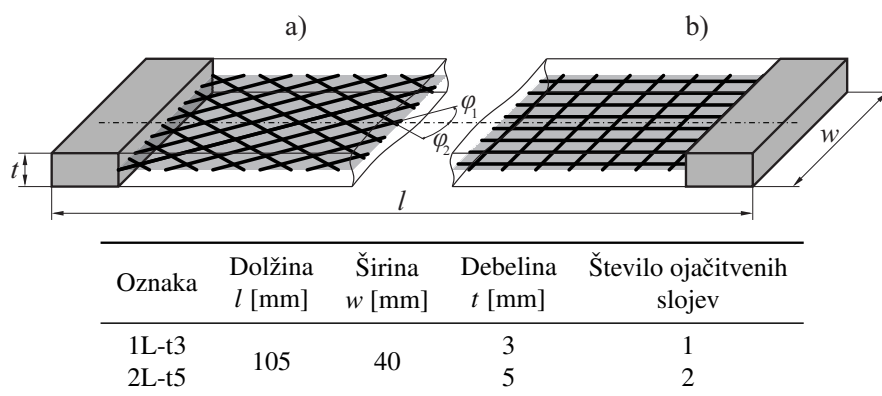
Namen prispevka je razviti numerični model gumenega kompozita, ojačanega z neprekinjenimi najlonskimi vlakni, ter ovrednotiti njegovo sposobnost napovedovanja mehanskega odziva pri enoosni natezni obremenitvi. Mehanske lastnosti gumene matrice in ojačitvenih vlaken so bile določene z eksperimentalnimi nateznimi preizkusi, na podlagi katerih je bil izdelan model po metodi končnih elementov v programskem okolju ANSYS MAPDL. Gumena matrica je modelirana s hiperelastičnim materialnim modelom Blatz–Ko, medtem ko so vlakna predstavljena z diskretnimi ojačitvenimi elementi. Ustreznost razvitega modela je bila preverjena s primerjavo numeričnih in eksperimentalnih rezultatov za kompozitne preizkušance z orientacijo vlaken $0^\circ/90^\circ$ in $45^\circ/-45^\circ$ ter različnim številom ojačitvenih slojev.

2 Metodologija

2.1 Eksperimentalna karakterizacija

Za določitev mehanskih lastnosti posameznih komponent kompozita so bili izvedeni enoosni natezni preizkusi gumene matrice, posameznih najlonskih vlaken ter kompozitnih preizkušancev. Preizkušanci gumene matrice so bili izdelani v obliki pravokotnih prizem z merami $25\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 1,65\text{ mm}$. Kompozitni preizkušanci so imeli dolžino 105 mm, širino 40 mm ter debelino 3 mm oziroma 5 mm, odvisno od števila ojačitvenih slojev. Vlakna so bila razporejena v dveh značilnih orientacijah, in sicer $0^\circ/90^\circ$ ter $45^\circ/-45^\circ$, kot prikazuje slika 1. Analizirani sta bili konfiguraciji z enim in dvema ojačitvenima slojema, katerih geometrijske značilnosti so podane na sliki 1.

Mehanske lastnosti ojačitvenih vlaken so bile določene z nateznim preizkusom posameznih najlonskih vlaken premera 0,4 mm in merilne dolžine 350 mm.



Slika 1: Geometrija kompozitnega preizkušanca z dvema orientacijama ojačitvenih vlaken (φ_1/φ_2): a) orientacija $45^\circ/-45^\circ$ in b) orientacija $0^\circ/90^\circ$. V spodnjem delu slike so podane geometrijske značilnosti analiziranih konfiguracij preizkušancev glede na debelino in število ojačitvenih slojev.

Vsi preizkusi so bili izvedeni na univerzalnem nateznem stroju s konstantno hitrostjo 0,084 mm/s. Med preizkusom sta bila neprekinjeno merjena sila in pomik, na podlagi katerih so bile določene krivulje sila–pomik. Za vsako konfiguracijo kompozitnih preizkušancev so bili preizkušeni trije vzorci, s čimer je bila zagotovljena ponovljivost rezultatov.

Zaradi prisotnega šuma meritev so bili eksperimentalni podatki dodatno obdelani z uporabo filtra Savitzky–Golay, ki omogoča glajenje meritev ob ohranitvi osnovne oblike odziva. Tako obdelani rezultati so bili uporabljeni za določitev materialnih parametrov vlaken, hiperelastičnega modela gumene matrice ter za validacijo numeričnega modela kompozita.

2.2 Numerični model

Za numerično analizo je bil razvit model po metodi končnih elementov v programskem okolju ANSYS MAPDL, ki omogoča analizo velikih deformacij hiperelastičnih materialov in diskretnih ojačitvenih elementov. Vse simulacije so bile izvedene z uporabo implicitnega reševalnika, primerne za kvazistatične nelinearne analize.

2.2.1 Model gumene matrice

Najprej je bil razvit numerični model gumene matrice, ki je služil za določitev materialnih parametrov hiperelastičnega materialnega modela. Geometrija preizkušanca je bila diskretizirana z osemvozliščnimi tridimenzionalnimi elementi SOLID185, pri čemer je bila ena čelna ploskev v celoti vpeta, na nasprotni pa je bil predpisan pomik v vzdolžni smeri, njeni prečni pomiki pa so bili omejeni.

Za opis mehanskega odziva gumene matrice je bil uporabljen hiperelastični materialni model Blatz–Ko, ki zaradi majhnega števila materialnih parametrov omogoča učinkovit opis nelinear-

nega odziva elastomerov pri velikih deformacijah. Gostota deformacijske energije je podana z izrazom

$$W = \frac{\mu}{2} \left(\frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right) \quad (1)$$

kjer je μ strižni modul materiala, I_2 in I_3 pa sta invarianti deformacijskega tenzorja. Vrednost strižnega modula je bila določena z umerjanjem numeričnih rezultatov glede na eksperimentalne meritve.

2.2.2 Model ojačitvenih vlaken

V naslednjem koraku je bil izdelan model posameznega najlonskega vlakna, s katerim so bile določene elastične lastnosti ojačitve. Model je bil obremenjen enako kot pri eksperimentalnem nateznem preizkusu, material vlaken pa je bil opisan z linearno elastičnim materialnim modelom z modulom elastičnosti $E = 1300 \text{ MPa}$ in Poissonovim številom $\nu = 0,39$ [3].

Pri modeliranju kompozita so bila vlakna predstavljena z diskretnimi ojačitvenimi elementi REINF264, ki omogočajo vgradnjo enosnih ojačitvenih elementov neposredno v tridimenzionalno mrežo gumene matrice. Vsak ojačitveni element predstavlja posamezno vlakno s krožnim presekom premera 0,4 mm, pri čemer se volumen gumene matrice na mestu ojačitve samodejno odšteje. Takšen pristop omogoča učinkovito modeliranje večjega števila vlaken brez potrebe po diskretizaciji vsakega vlakna s tridimenzionalnimi volumskimi elementi, s čimer se bistveno zmanjša računska zahtevnost modela, ob ohranitvi dobre natančnosti napovedi mehanskega odziva [1, 7].

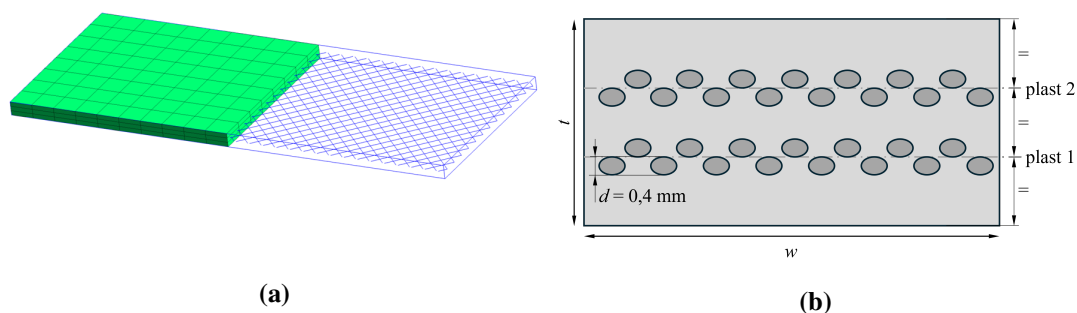
2.2.3 Model kompozitnega preizkušanca

Po umerjanju materialnih modelov gumene matrice in ojačitvenih vlaken je bil izdelan numerični model kompozitnega preizkušanca. Geometrija ojačitvenih vlaken je bila generirana s programskim paketom Gmsh [2] z uporabo lastno razvite Python skripte, ki omogoča avtomatsko izdelavo različnih konfiguracij kompozita. Skripta omogoča spreminjanje orientacije vlaken, števila ojačitvenih slojev, medsebojne razdalje med vlakni, debeline preizkušanca ter velikosti mreže končnih elementov brez ročnega modeliranja posamezne geometrije.

Po izdelavi geometrije je bila mreža končnih elementov ustvarjena v programu ANSYS MAPDL s pomočjo knjižnice PyMAPDL. Gumena matrica je bila diskretizirana s tridimenzionalnimi elementi SOLID185, medtem ko so bila ojačitvena vlakna modelirana z diskretnimi elementi REINF264. Velikost končnih elementov je bila določena na podlagi analize konvergence mreže. Za gumeno matrico je bila uporabljena velikost elementa 2 mm, po debelini preizkušanca pa je bilo uporabljenih sedem plasti elementov, s čimer je bilo zagotovljeno, da ojačitveni elementi niso ležali na robovih volumskih elementov.

Na sliki 2a je prikazana mreža končnih elementov kompozitnega preizkušanca z enim ojačitvenim slojem in orientacijo vlaken $45^\circ/-45^\circ$. Zelena barva predstavlja volumske elemente gumene matrice, modra pa potek diskretnih ojačitvenih elementov.

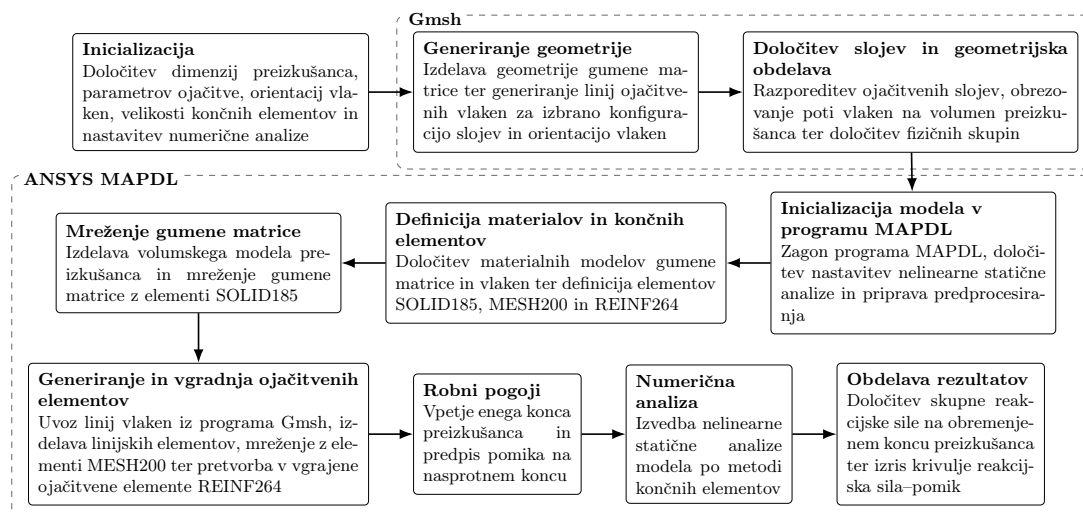
V raziskavi sta bili analizirani dve konfiguraciji kompozita z orientacijo vlaken $0^\circ/90^\circ$ in $45^\circ/-45^\circ$ ter z enim oziroma dvema ojačitvenima slojema. Pri vseh modelih je bila medsebojna razdalja



Slika 2: Model kompozitnega preizkušanca; a) Mreža končnih elementov kompozitnega preizkušanca z enim ojačitvenim slojem in orientacijo vlaken $45^{\circ}/-45^{\circ}$. Zelena barva predstavlja volumske elemente gumene matrice, modra pa potek diskretnih ojačitvenih elementov. b) Prečni prerez kompozitnega preizkušanca, ki prikazuje razporeditev vlaken in lokacijo ojačitvenih slojev. Ojačitveni sloji so enakomerno razporejeni po debelini preizkušanca.

med sosednjimi vlakni enaka 2,2 mm, posamezni ojačitveni sloji pa so bili po debelini preizkušanca enakomerno razporejeni, kot je prikazano na sliki 2b.

Vse simulacije so bile izvedene v programu ANSYS MAPDL z uporabo implicitne sheme, pri čemer je bila čelni površini na enem koncu preizkušanca predpisano fiksno vpetje, na drugem pa vzdolžni pomik, enak pogojem eksperimentalnega nateznega preizkusa. Na drugi površini so bili prav tako vpeti pomiki v prečnih smereh na obremenitev. Izmerjena skupna reakcijska sila na obremenjeni ploskvi je bila uporabljena za primerjavo numeričnih in eksperimentalnih rezultatov ter validacijo razvitega numeričnega modela. Potek izdelave numeričnega modela kompozitnega preizkušanca je prikazan na sliki 3.



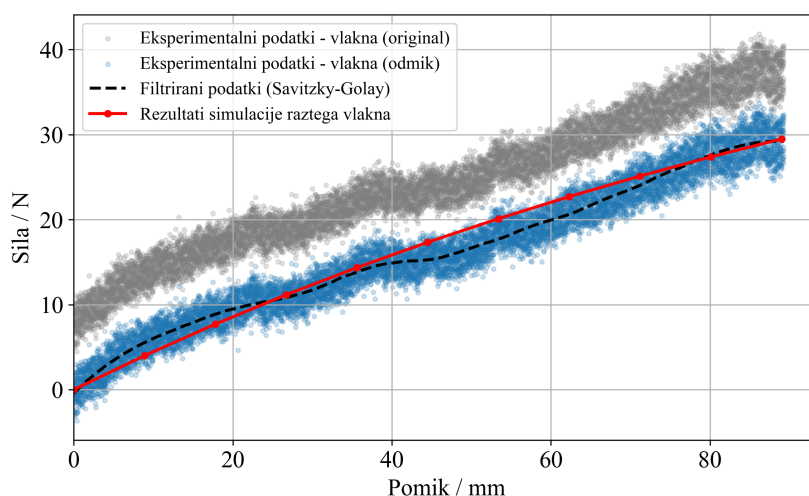
Slika 3: Potek skripte za izdelavo numeričnega modela kompozitnega preizkušanca.

3 Rezultati in diskusija

3.1 Umerjanje materialnih modelov

Pred analizo kompozitnih preizkušancev so bili numerični modeli posameznih komponent umerjeni na podlagi eksperimentalnih nateznih preizkusov. Najprej je bil določen materialni model najlonskih vlaken, nato pa še hiperelastični model gumene matrice.

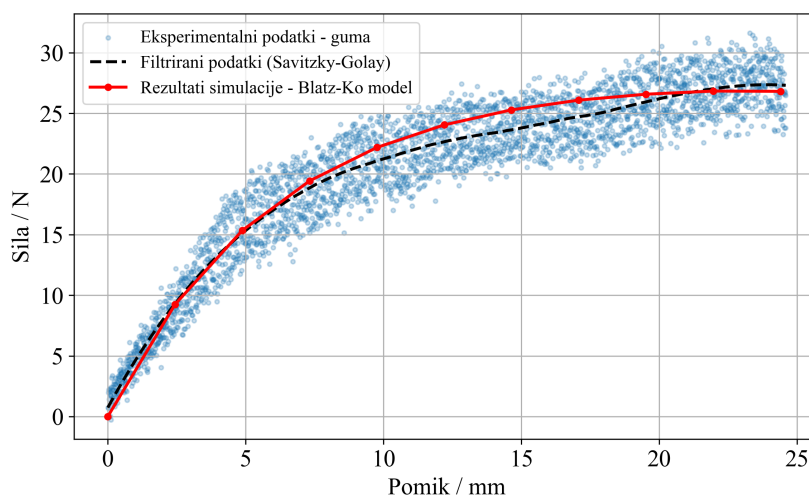
Na sliki 4 je prikazana primerjava eksperimentalnih in numeričnih rezultatov za posamezno ojačitveno vlakno. Zaradi začetnega pomika pri meritvah je bil eksperimentalni odziv pred obdelavo korigiran tako, da se je krivulja začela pri ničelni sili in pomiku. Za zmanjšanje vpliva merilnega šuma je bil uporabljen filter Savitzky–Golay, na podlagi katerega je bila določena zglajena krivulja sila–pomik. Numerični model z linearno elastičnim materialnim modelom dobro opiše togost posameznega vlakna v celotnem obravnavanem območju deformacij.



Slika 4: Primerjava eksperimentalnega in numeričnega odziva posameznega vlakna. Sive točke prikazujejo eksperimentalne meritve, modre točke pa rezultate meritev po ničelni korekciji. Črna črtkana črta predstavlja filtrirano krivuljo eksperimentalnih rezultatov, rdeča črta pa rezultate numeričnega modela z linijskimi končnimi elementi in linearno elastičnim materialnim modelom vlaken.

Odziv gumene matrice je prikazan na sliki 5. Zaradi večjega šuma meritev so bili tudi ti rezultati obdelani s filtrom Savitzky–Golay. Za opis nelinearnega mehanskega odziva je bil uporabljen hiperelastični materialni model Blatz–Ko, katerega parameter strižnega modula je bil določen z umerjanjem glede na eksperimentalne rezultate. Dobljeni numerični odziv se dobro ujema z eksperimentalno krivuljo in ustrezno opiše nelinearno obnašanje gumene matrice v obravnavanem območju deformacij.

Na podlagi dobljenih rezultatov lahko ugotovimo, da izbrana materialna modela ustrezno opišeta mehanski odziv posameznih komponent kompozita in predstavljata primerno osnovo za nadaljnje numerično modeliranje kompozitnih preizkušancev.



Slika 5: Primerjava eksperimentalnega in numeričnega odziva gumene matrice. Modre točke predstavljajo eksperimentalno izmerjene vrednosti, ki so bile zaradi šuma obdelane s filtrom Savitzky–Golay (črna črtkana črta). Rdeča črta predstavlja rezultate numeričnega modela z uporabo hiperelastičnega materialnega modela Blatz–Ko.

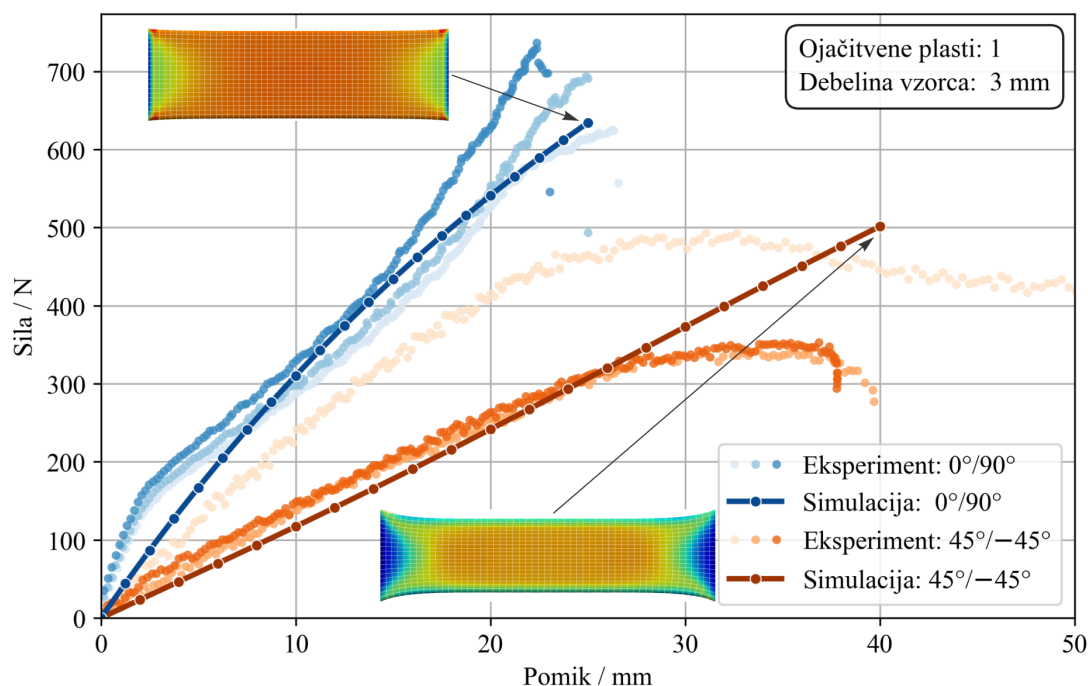
3.2 Mehanski odziv kompozita in validacija numeričnega modela

Na slikah 6 in 7 je prikazana primerjava eksperimentalnih in numeričnih krivulj sila–pomik za kompozitne preizkušance z enim oziroma dvema ojačitvenima slojema. Za vsako konfiguracijo je prikazanih več eksperimentalnih meritev, kar potrjuje dobro ponovljivost izvedenih nateznih preizkusov.

Rezultati kažejo, da numerični model pri vseh analiziranih konfiguracijah dobro napove globalni mehanski odziv kompozita ter uspešno sledi eksperimentalnim rezultatom skozi večji del obravnavanega območja deformacij. Hkrati je jasno razviden izrazit vpliv orientacije vlaken na togost in nosilnost kompozita.

Kompoziti z orientacijo vlaken $0^{\circ}/90^{\circ}$ izkazujejo bistveno večjo togost, saj vlakna, orientirana v smeri obremenitve, neposredno prevzemajo natezno obremenitev. Nasprotno imajo preizkušanci z orientacijo $45^{\circ}/-45^{\circ}$ manjšo začetno togost, ker se obremenitev v večji meri prenaša preko gumene matrice, vlakna pa se med obremenjevanjem postopoma obračajo v smeri nateznih napetosti (deformacij). Zaradi tega je mehanski odziv teh preizkušancev izrazito bolj nelinearen.

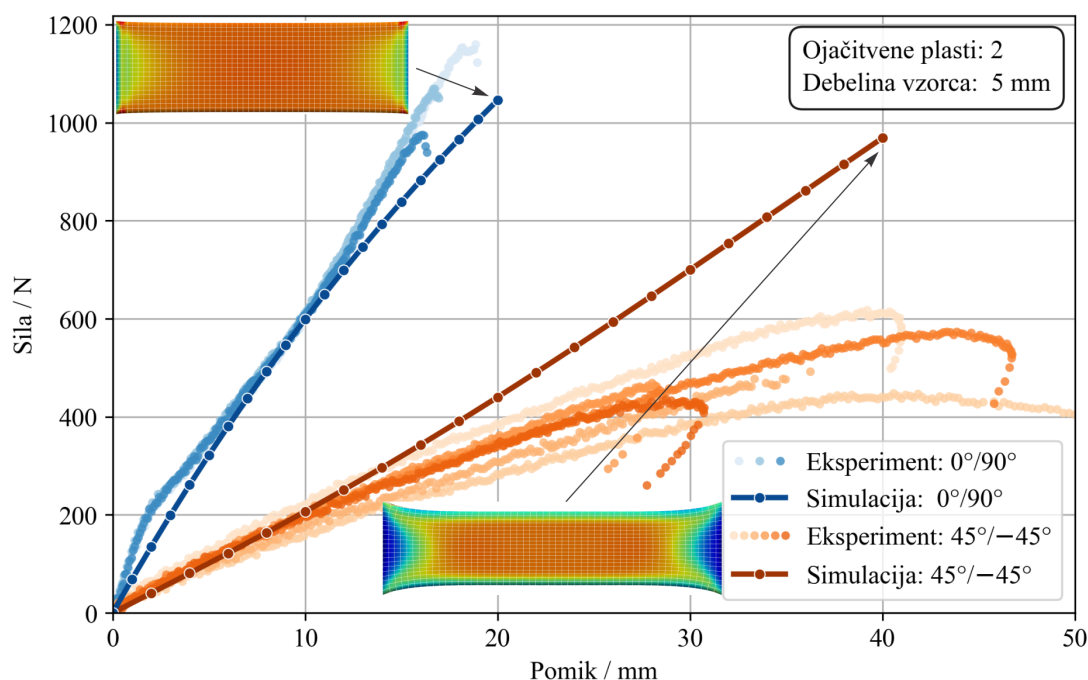
Pri konfiguraciji $0^{\circ}/90^{\circ}$ numerični model nekoliko podceni začetno togost preizkušanca. Enako obnašanje je bilo opaženo že pri umerjanju materialnega modela posameznega vlakna (slika 4), kjer eksperimentalni rezultati kažejo rahlo nelinearno utrjevanje pri majhnih deformacijah, medtem ko je v numeričnem modelu uporabljena linearno elastična materialna zakonitost. K razlikam lahko dodatno prispevata tudi začetno poravnavanje vlaken in odpravljanje njihove začetne valovitosti med nateznim preizkusom. Kljub temu numerični model dobro napove celoten mehanski odziv kompozita.



Slika 6: Primerjava eksperimentalnega in numeričnega odziva kompozitnih preizkušancev z enim ojačitvenim slojem. Konfiguracije z orientacijo vlaken $0^\circ/90^\circ$ so prikazane z modrimi odtenki, konfiguracije z orientacijo $45^\circ/-45^\circ$ pa z oranžnimi odtenki. Temno modra in temno rdeča črta predstavljata rezultate numeričnega modela za obe konfiguraciji. Dodatno sta prikazani deformirani obliki preizkušancev na koncu simulacije, ki prikazujejo razporeditev napetosti.

Pri konfiguraciji $45^\circ/-45^\circ$ numerični model dobro opiše začetni del eksperimentalne krivulje, pri večjih deformacijah pa začne precenjevati togost kompozita. Numerični model napoveduje postopno povečevanje togosti zaradi obračanja vlaken v smer obremenitve, medtem ko eksperimentalni rezultati kažejo postopno zmanjševanje togosti. Ključni vzrok za opaženo odstopanje je najverjetneje drsenje ojačitvenih vlaken znotraj gumene matrice. Pri večjih deformacijah začne adhezivna vez med vlakni in matrico postopoma popuščati, kar omogoči relativni pomik vlaken glede na matrico. Ker je gumena matrica med natezno obremenitvijo raztegnjena, na vlakna deluje normalni tlak, zaradi česar nastane trenje, ki zdrs delno omejuje. Posledično prenos obremenitve med matrico in vlakni ni več popoln, kar se odraža kot zmanjšanje togosti kompozita. Opisane mehanizma numerični model ne upošteva, saj predpostavlja popolno vez med gumeno matrico in ojačitvenimi vlakni skozi celoten potek deformacije.

Enake trende opazimo tudi pri preizkušancih z dvema ojačitvenima slojema (slika 7). Povečanje števila ojačitvenih slojev povzroči pričakovano povečanje togosti in nosilnosti kompozita, numerični model pa tudi v tem primeru dobro napove globalni mehanski odziv. Manjša odstopanja med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati so predvsem posledica poenostavljenega materialnega modela vlaken, predpostavke popolne adhezivne vezi med vlakni in gumeno matrico ter variabilnosti pri izdelavi kompozitnih preizkušancev.



Slika 7: Primerjava eksperimentalnega in numeričnega odziva kompozitnih preizkušancev z dvema ojačitvenima slojema. Konfiguracije z orientacijo vlaken $0^\circ/90^\circ$ so prikazane z modrimi odtenki, konfiguracije z orientacijo $45^\circ/-45^\circ$ pa z oranžnimi odtenki. Temno modra in temno rdeča črta predstavljata rezultate numeričnega modela za obe konfiguraciji. Dodatno sta prikazani deformirani obliki preizkušancev na koncu simulacije, ki prikazujejo razporeditev napetosti.

Na podlagi primerjave eksperimentalnih in numeričnih rezultatov lahko ugotovimo, da razviti numerični model z uporabo diskretnih ojačitvenih elementov REINF264 omogoča učinkovito in računsko ekonomično napovedovanje mehanskega odziva zvezno ojačanih gumenih kompozitov. Kljub uporabljenim poenostavitvam model z dobro natančnostjo napove globalni odziv kompozita in predstavlja ustrezno osnovo za nadaljnji razvoj numeričnih modelov, ki bodo vključevali poškodbe materiala, drsenje vlaken ter analize utrujanja.

4 Zaključek

V prispevku je predstavljen eksperimentalni in numerični pristop za analizo mehanskega odziva gumenih kompozitov, ojačanih z neprekinjenimi najlonskimi vlakni. Na podlagi eksperimentalnih nateznih preizkusov gumene matrice, posameznih vlaken in kompozitnih preizkušancev je bil razvit ter umerjen numerični model po metodi končnih elementov v programskem okolju ANSYS MAPDL. Razvita metodologija omogoča učinkovito avtomatsko generiranje različnih konfiguracij kompozitnih preizkušancev in predstavlja računsko učinkovito alternativo podrobemu modeliranju posameznih vlaken s tridimenzionalnimi volumskimi elementi.

Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov je pokazala dobro ujemanje globalnega mehanskega odziva pri vseh analiziranih konfiguracijah. Rezultati potrjujejo, da orientacija vlaken bistveno vpliva na togost kompozita. Preizkušanci z orientacijo vlaken $0^\circ/90^\circ$ dosegajo večjo togost zaradi neposrednega prenosa obremenitve preko vlaken, medtem ko je pri orientaciji $45^\circ/-45^\circ$ mehanski odziv izrazito bolj nelinearen zaradi obračanja vlaken in postopnega drsenja med vlakni ter gumeno matrico.

Največja odstopanja med numeričnimi in eksperimentalnimi rezultati so bila ugotovljena pri večjih deformacijah kompozitov z orientacijo vlaken $45^\circ/-45^\circ$. Razlike so predvsem posledica popuščanja adhezivne vezi med vlakni in gumeno matrico ter posledičnega drsenja vlaken, česar uporabljeni numerični model ne upošteva.

Razviti numerični model predstavlja primerno osnovo za nadaljnje raziskave mehanskega odziva zvezno ojačanih gumenih kompozitov. Nadaljnje delo bo usmerjeno v razvoj naprednejših materialnih modelov, ki bodo poleg hiperelastičnega odziva upoštevali tudi poškodbe materiala, degradacijo adhezivne vezi med vlakni in matrico ter omogočili simulacijo utrujenostnega obnašanja kompozitov.

Zahvala

Avtorji se zahvaljujejo Javni agenciji za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije za sofinanciranje raziskovalnega programa št. P2-0063 ter projektov št. N2-0326 in J7-60120.

Literatura

- [1] M. Behrooz, O. A. Olatunbosun, and W. Ding. Finite element analysis of aircraft tyre – effect of model complexity on tyre performance characteristics. *Materials & Design*, 35:810–819, 3 2012.
- [2] C. Geuzaine and J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 0:1–24, 2009.
- [3] I. Krause, A. J. Segreto, H. Przirembel, and R. L. Mach. Poisson’s ratio for viscoelastic materials. *Materials Science and Engineering*, 1(4):239–250, 1966.
- [4] S. Oman, M. Fajdiga, and M. Nagode. Estimation of air-spring life based on accelerated experiments. *Materials & Design*, 31:3859–3868, 9 2010.
- [5] S. Oman and M. Nagode. On the influence of the cord angle on air-spring fatigue life. *Engineering Failure Analysis*, 27:61–73, 1 2013.
- [6] S. Oman and M. Nagode. The influence of piston shape on air-spring fatigue life. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 41:1019–1031, 5 2018.
- [7] S. Oman, M. Nagode, and J. Klemenc. Rubber–fibre composite modelling and its influence on fatigue damage assessment. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 44:521–532, 2 2021.
- [8] J. Torggler, C. Buzzi, M. Leitner, T. Faethe, and H. Müller. Fatigue behaviour of cord rubber composite materials in air spring bellows of rail vehicles. *Procedia Structural Integrity*, 57:152–160, 1 2024.
- [9] J. Torggler, A. Dutzler, B. Oberdorfer, T. Faethe, H. Müller, C. Buzzi, and M. Leitner. Investigating damage mechanisms in cord-rubber composite air spring bellows of rail vehicles and representative specimen design. *Applied Composite Materials* 2023 30:6, 30:1979–1999, 8 2023.



Kalibracija numeričnih modelov nekohezivnih praškov in sipkih trdnin

Marko Motaln, Tomaž Vuherer in Tone Lerher

Calibration of Numerical Models for Non-Cohesive Powders and Bulk Solids

Povzetek. Sipke snovi so zaradi velikostne porazdelitve, nepravilne oblike delcev in kompleksnih kontaktnih interakcij zahtevne za eksperimentalno karakterizacijo ter numerično modeliranje. Zanesljivost simulacij po metodi diskretnih elementov (DEM) je zato odvisna od izbire kontaktnega modela in kalibracije vhodnih materialnih ter kontaktnih parametrov. V prispevku je predstavljen eksperimentalno-numerični postopek kalibracije, ki temelji na laboratorijskih preizkusih, numeričnih simulacijah in primerjavi njihovih makroskopskih odzivov. Obravnavana je kalibracija nekohezivnih praškov in večjih sipkih trdnin z izbranimi laboratorijskimi preizkusi. Zveza med vhodnimi parametri DEM in izbranimi makroskopskimi odzivnimi veličinami je predstavljena z odzivnimi površinami, postopek kalibracije pa je ponazorjen na primeru abrazivnih delcev Al_2O_3 , karakteriziranih z merilno opremo podjetja GranuTools.

Abstract. Bulk solids are challenging to characterize experimentally and model numerically because of their particle size distributions, irregular particle shapes, and complex contact interactions. The reliability of discrete element method (DEM) simulations therefore depends on the selection of an appropriate contact model and the calibration of the input material and contact parameters. This paper presents an experimental–numerical calibration procedure based on laboratory tests, numerical simulations, and comparison of their macroscopic responses. The calibration of non-cohesive powders and coarser bulk solids using selected laboratory tests is discussed. The relationship between the DEM input parameters and selected macroscopic response variables is represented using response surfaces, while the calibration procedure is demonstrated using abrasive Al_2O_3 particles characterized with GranuTools measuring instruments.

1 Uvod

V industrijskih procesih, kot so transport, doziranje, mešanje, drobljenje in polnjenje [1], [2], [3], mehanski odziv sipkih snovi neposredno vpliva na masni pretok, porabo energije, obremenitve konstrukcijskih elementov in obrabo kontaktnih površin. Makroskopsko obnašanje materiala izvira iz lokalnih interakcij med delci ter med delci in procesno opremo ter se izraža v pretočnosti, nasipnem in porušitvenem kotu, nasipni gostoti, kompakcijskem odzivu in strižnem obnašanju. Analitični izrazi in empirične korelacije teh pojavov pogosto ne opišejo dovolj podrobno, saj ne omogočajo neposrednega vpogleda v gibanje delcev, kontaktne sile in prostorsko porazdelitev obremenitev. Metoda diskretnih elementov (DEM) obravnava sipko snov kot sistem posameznih delcev, katerih translacijsko in rotacijsko gibanje se izračunava na podlagi delujočih sil, momentov in izbranega kontaktnega modela. Razvoj

diskretnih numeričnih metod in uporaba grafičnih procesnih enot omogočata izvedbo podrobnih simulacij laboratorijskih in industrijskih sistemov [4]. Njihova zanesljivost je odvisna od numerične predstavitve delcev, izbranega kontaktnega modela in vrednosti vhodnih parametrov. Ker natančna predstavitev oblikovne in velikostne porazdelitve delcev pogosto ni izvedljiva, se uporabljajo poenostavljene geometrije delcev, kot so multisferični delci, sferocilindri ali poliedri. Kontaktnih parametrov, kot so koeficient drsnega trenja med delci μ_f , koeficient kotalnega trenja, oziroma kotalni upor μ_r , koeficient restitucije e in normalna kontaktna togost k_n , praviloma ni mogoče neposredno prenesti iz fizikalnih meritev v numerični model [5], [6]. Njihove vrednosti je zato treba določiti s kalibracijo, pri kateri se laboratorijski preizkus ponovi v numeričnem modelu ali se izdelata njegov digitalni dvojček. Ujemanje eksperimentalnega in numeričnega odziva se ovrednoti na podlagi makroskopskih odzivnih veličin, kot so statični kot mirovanja θ_s , dinamični kot mirovanja θ_d , nasipna gostota ρ_b , masni pretok $\dot{m}$, kompakcijo $\rho_b(N)$ ali strižni odziv $\tau(\gamma)$. [7]. Ker lahko različne kombinacije vhodnih parametrov pri posameznem preizkusu povzročijo podoben makroskopski odziv, ta praviloma ne omogoča njihove enolične določitve. Predstavljena metodologija zato temelji na uporabi več komplementarnih laboratorijskih preizkusov in njihovih numeričnih modelov. Namen prispevka je prikazati eksperimentalno-numerični postopek kalibracije DEM modelov nekohezivnih praškov in sipkih trdnin, pri katerem primerjava izbranih makroskopskih odzivov omogoča sistematično omejevanje prostora dopustnih kontaktnih parametrov.

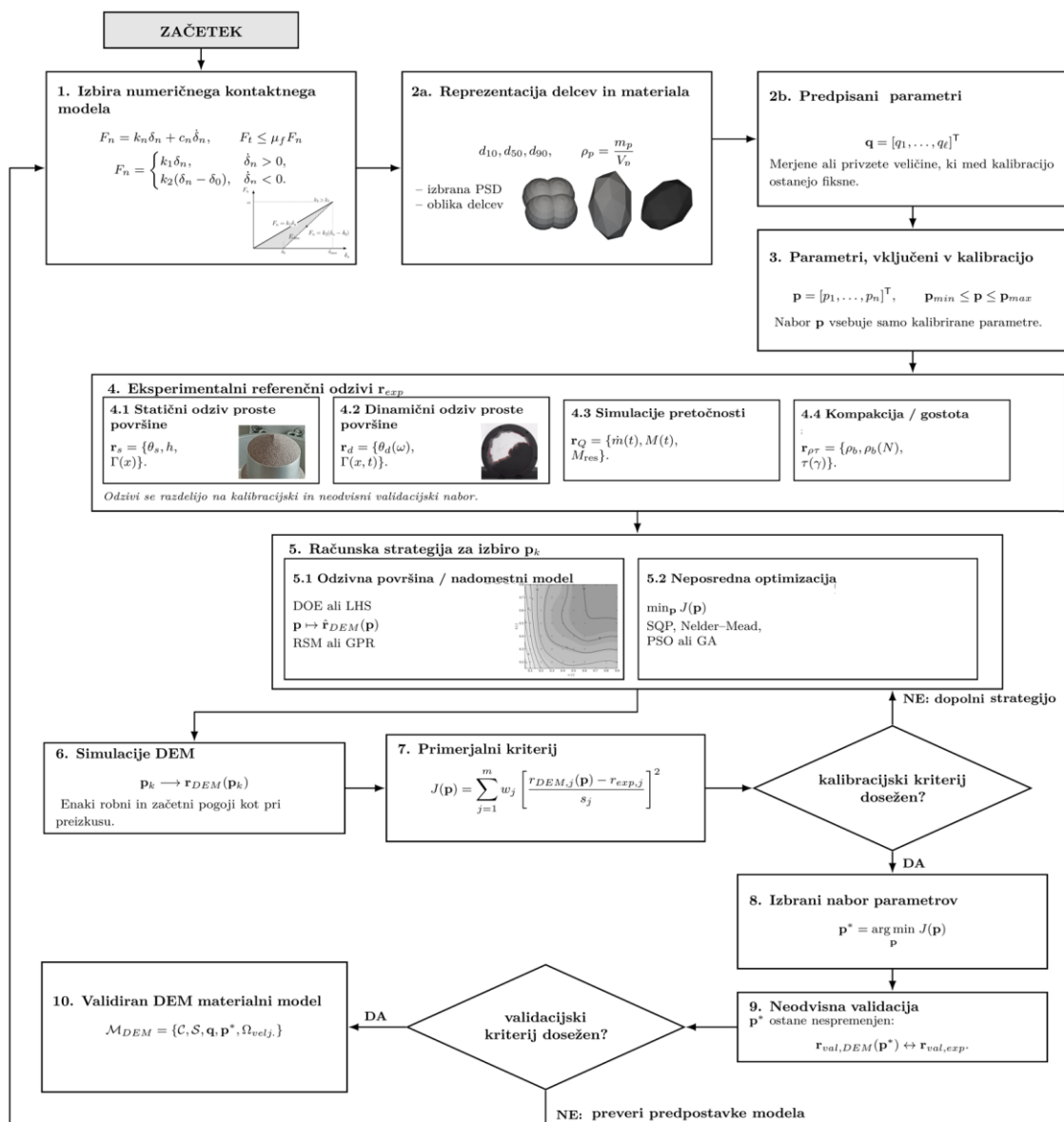
2 Metodologija

Avtorja Coetzee in Katterfeld [8] [9] razlikujeta med neposrednim določanjem mikroskopskih, oziroma kontaktnih parametrov in posredno kalibracijo na ravni makroskopskega odziva sipke snovi. Pri industrijskih aplikacijah se pogosteje uporablja drugi pristop, saj so realni delci v modelih DEM navadno poenostavljeni glede na obliko, velikostno porazdelitev, togost in kontaktne interakcije. Neposredno izmerjene vrednosti zato ne zagotavljajo nujno pravilnega makroskopskega odziva numeričnega modela. Kalibracija tako pomeni uskladitev kontaktnega modela, numerične predstavitve delcev in izbranih odzivnih veličin.

Splošen potek kalibracije je prikazan na sliki 1. Postopek se začne z izbiro kontaktnega modela in parametrov, vključenih v kalibracijo. Pri nekohezivnih sipkih snoveh so to najpogosteje koeficient drsnega trenja med delci μ_f , koeficient drsnega trenja med delci in steno μ_{fw} , koeficient kotalnega trenja μ_r , koeficient restitucije e in kontaktna togost k_n . Nato se določijo oblika, velikostna porazdelitev in gostota ρ_w . Sprememba numerične predstavitve delcev praviloma vpliva na makroskopski odziv materiala, zato ob vnovični spremembi zahteva ponovno kalibracijo.

Območje spreminjanja parametrov se določi na podlagi neposrednih meritev, podatkov iz literature ali predhodnih numeričnih analiz. Za posamezne kombinacije parametrov se nato izvedejo numerične ponovitve laboratorijskih preizkusov. Numerična simulacija (v nekaterih primerih digitalni dvojček) mora reproducirati geometrijo, način polnjenja, začetno stanje materiala, gibanje sestavnih delov in metodo vrednotenja odziva. Ujemanje eksperimenta in simulacije se lahko ovrednoti z relativnim odstopanjem posamezne odzivne veličine ali z uteženo napako več odzivov. Nove kombinacije parametrov se določajo s sistematičnim pregledom parametričnega prostora, načrtom numeričnih poskusov, odzivnimi površinami ali

optimizacijskimi algoritmi. Izbrani nabor je treba nazadnje preveriti z odzivom, ki ni bil neposredno vključen v kalibracijo.



Slika 1: Shematski prikaz metodologije eksperimentalno-numerične kalibracije in validacije materialnega modela DEM.

Poseben izziv je ne enoličnost določitve parametrov. Različne kombinacije μ_f in μ_r lahko na primer povzročijo enak statični nasipni kot θ_s . Za določitev n neznanih parametrov je zato teoretično potrebnih najmanj n medsebojno neodvisnih odzivnih veličin, v praksi pa je zaradi merilne negotovosti, korelacije med parametri in omejene občutljivosti preizkusov smiselno uporabiti večje število meritev. Pri tem ni nujno izvesti n ločenih preizkusov, saj lahko

posamezen preizkus zagotovi več neodvisnih odzivov. Kombinacija komplementarnih odzivnih veličin tako omogoča učinkovitejše omejevanje prostora dopustnih parametrov.

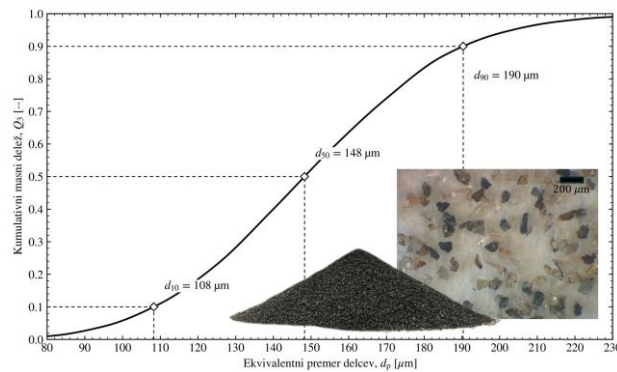
Kalibracijski preizkusi se izberejo glede na vrsto materiala in predvideno uporabo modela DEM. Pri praških so primerni preizkusi dinamičnega obnašanja proste površine, pri katerih se določa dinamični nasipni kot θ_d . Pri večjih sipkih trdninah se pogosto uporabljajo statični preizkusi, tokovni preizkusi ali "Draw-down" preizkusi, s katerimi je mogoče določiti θ_s , masni pretok $\dot{m}$, preostalo maso in druge odzivne veličine. Pridobivanje več odzivov z enim preizkusom zmanjšuje neenoličnost kalibracije.

Za numerične ponovitve laboratorijskih meritev so bili v programskem okolju Ansys Rocky razviti numerični modeli izbranih merilnih postopkov podjetja GranuTools. Podrobnejši opis razvoja »digitalnih dvojčkov« (GranuDigitalTwins) in njihove uporabe je objavljen na strani [10]. V nadaljevanju je predstavljena uporaba opisane metodologije pri kalibraciji nekohezivnih abrazivnih delcev Al_2O_3 , pri kateri so eksperimentalni odzivi primerjani z rezultati numeričnih ponovitev preizkusov.

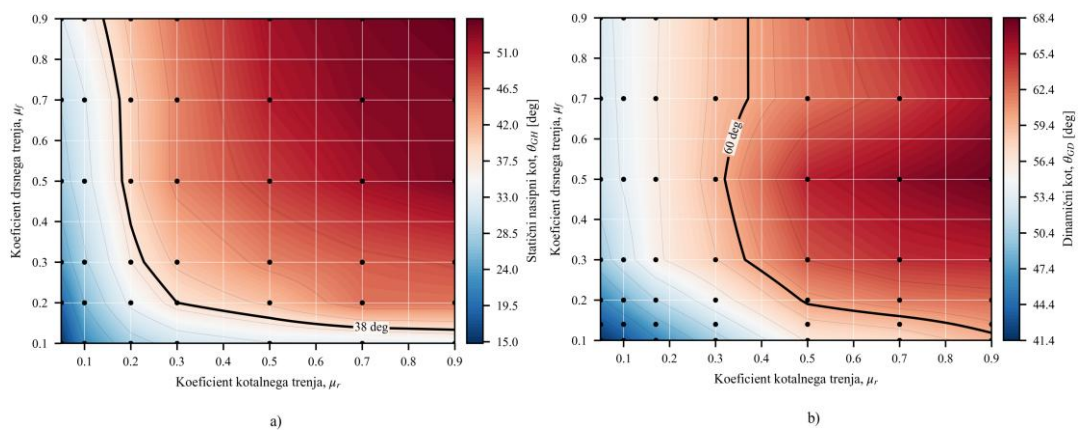
3 Numerična kalibracija materialnega modela

Za obravnavane abrazivne delce Al_2O_3 (Slika 2) je bil uporabljen pristop, ki temelji na več preizkusih. Statični nasipni kot θ_s je bil kalibriran s preizkusom GranuHeap, dinamični nasipni kot θ_d s preizkusom GranuDrum, potek zgoščevanja, izražen z nasipno gostoto $\rho_b(N)$ v odvisnosti od števila zaporednih udarcev N , pa s preizkusom GranuPack. Preizkus GranuFlow ni bil vključen v kalibracijo, temveč je bil uporabljen za neodvisno validacijo izbranega nabora parametrov.

Pri izdelavi odzivnih površin za GranuHeap in GranuDrum (Slika 3) sta bila spreminjana koeficient drsnega trenja med delci μ_f in koeficient kotalnega trenja μ_r , preostali materialni in kontaktni parametri so bili privzeti po viru [11]. Posamezne točke na odzivnih površinah predstavljajo izvedene simulacije DEM, vrednosti med njimi pa so določene z interpolacijo, omejeno na obravnavani parametrični prostor. Ciljni interval statičnega nasipnega kota je znašal $\theta_s = 38^\circ \pm 2^\circ$, ciljni interval dinamičnega nasipnega kota pa $\theta_d = 60^\circ \pm 2^\circ$. Ker posamezna odzivna površina ne omogoča enolične določitve μ_f in μ_r , je bila končna kombinacija določena na podlagi preseka ciljnih območij obeh odzivnih površin. V skupnem kalibracijskem območju je bila izbrana kombinacija $\mu_f = 0,135$ in $\mu_r = 0,841$. Odzivni površini pri teh vrednostih napovedujeta statični nasipni kot $\theta_s = 37,97^\circ$ za GranuHeap in dinamični nasipni kot $\theta_d = 60,01^\circ$ za GranuDrum. Razmeroma visoka vrednost μ_r kaže na izrazito omejevanje rotacije numeričnih delcev zaradi njihove izrazite oblike, kar je kvalitativno skladno z ugotovitvami iz literature. Nekateri avtorji zato njihovo rotacijo močno omejijo ali popolnoma preprečijo, da bi bolje reproducirali obnašanje nepravilno oblikovanih delcev [12].

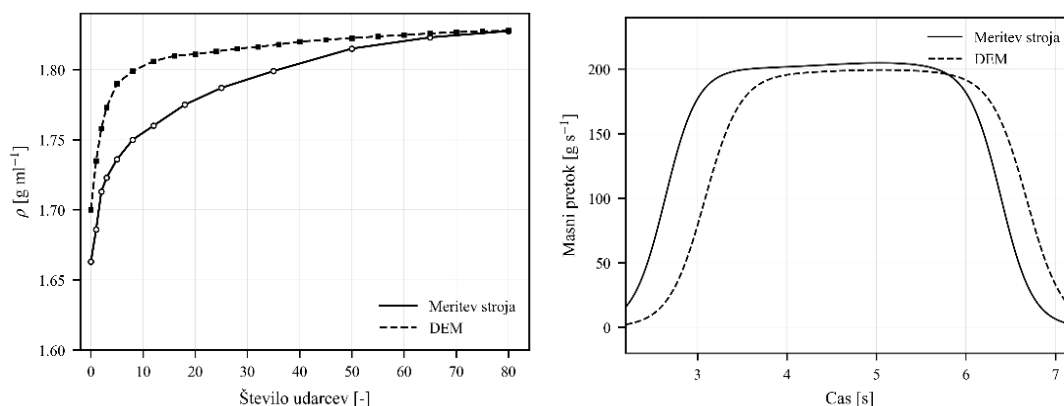


Slika 2: Kumulativna masna porazdelitev ekvivalentnega premera delcev abraziva Al_2O_3 .



Slika 3: Odzivni površini vpliva koeficienta drsnega trenja μ_f in koeficienta kotalnega trenja μ_r na: a) statični nasipni kot θ_s pri preizkusu GranuHeap in b) dinamični nasipni kot θ_d pri preizkusu GranuDrum.

Izbrana kombinacija tako sočasno reproducira statični in dinamični makroskopski odziv materiala. Pri preizkusu GranuPack numerični model (Slika 4a) ustrezno reproducira splošni potek kompaktacije $\rho_b(N)$, pri čemer se končna gostota dobro ujema z eksperimentalno vrednostjo. V začetnem delu simulacija napoveduje nekoliko hitrejše naraščanje gostote. Ta del odziva je izraziteje odvisen od izbranega kontaktnega modela, priprave začetnega nasutja, idealizacije oblike delcev in načina prenosa mehanske obremenitve v numeričnem modelu. Po končani kalibraciji je bil model brez nadaljnjega prilagajanja parametrov validiran s preizkusom GranuFlow (Slika 4b). Skozi odprtino premera 22 mm je bil eksperimentalno določen največji masni pretok $\dot{m}_{\text{exp}} = 200,7 \text{ g/s}$, simulacija pa je napovedala $\dot{m}_{\text{DEM}} = 198,0 \text{ g/s}$. Numerično določena vrednost je bila od eksperimentalne nižja za 1,3 %, kar kaže, da izbrani parametri poleg statičnega in dinamičnega nasipnega kota ter poteka kompaktacije ustrezno opišejo tudi pretočnost materiala v obravnavani geometriji.



Slika 4: Primerjava eksperimentalnih in numeričnih odzivov: a) potek zgoščevanja $\rho_b(N)$ v odvisnosti od števila udarcev N pri preizkusu GranuPack; b) časovni potek kumulativne iztočene mase skozi odprtino premera 22 mm pri validacijskem preizkusu GranuFlow.

4 Zaključek

Industrijski DEM modeli praviloma vključujejo simulacije z več milijoni delcev, zato je njihova računska izvedljivost odvisna od preišljene poenostavitve geometrije delcev, velikostne porazdelitve in izbire kontaktnega modela. Predstavljeni pristop zmanjšuje obseg kalibracije z analizo občutljivosti, fiksiranjem vplivnih parametrov ter optimizacijo na podlagi odzivnih površin. Na primeru abrazivnih delcev Al_2O_3 je bila določena kombinacija $\mu_f = 0,135$ in $\mu_r = 0,841$, ki ustrezno reproducira statični in dinamični nasipni kot ter gostoto. Napovedna sposobnost modela je bila potrjena z neodvisnim preizkusom GranuFlow, pri katerem je odstopanje numerično določenega masnega pretoka znašalo 1,3 %. Rezultati potrjujejo, da je mogoče z ustrezno kalibracijo pridobiti računsko učinkovit DEM model, ki kljub nujnim poenostavitvam ohranja ključne značilnosti realnega odziva sipke snovi. Takšen pristop je posebej pomemben pri prenosu modela na industrijske aplikacije. Kalibrirani parametri tako omogočajo, da poenostavljen model ohrani ustrezen makroskopski odziv tudi pri obravnavi bistveno večjih sistemov. Metodologija s tem zagotavlja smiselno izhodišče za razvoj računsko obvladljivih in napovedno zanesljivih modelov industrijskih procesov ravnanja s sipkimi snovmi.

Literatura

- [1] L. Chen, Z. Sun, P. Li, H. Ma, in G. Pan, »DEM simulation of the transport of mine concrete by a screw feeder«, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, let. 44, št. 7, str. 280, jul. 2022, doi: 10.1007/s40430-022-03595-8.
- [2] C. Bierwisch, T. Kraft, H. Riedel, in M. Moseler, »Three-dimensional discrete element models for the granular statics and dynamics of powders in cavity filling«, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, let. 57, št. 1, str. 10–31, jan. 2009, doi: 10.1016/j.jmps.2008.10.006.

- [3] R. Cai in Y. Zhao, »An experimentally validated coarse-grain DEM study of monodisperse granular mixing«, *Powder Technology*, let. 361, str. 99–111, feb. 2020, doi: 10.1016/j.powtec.2019.10.023.
- [4] Y. Dong, D. Yan, in L. Cui, »An Efficient Parallel Framework for the Discrete Element Method Using GPU«, *Applied Sciences*, let. 12, št. 6, str. 3107, mar. 2022, doi: 10.3390/app12063107.
- [5] C. Hoshishima, S. Ohsaki, H. Nakamura, in S. Watano, »Parameter calibration of discrete element method modelling for cohesive and non-spherical particles of powder«, *Powder Technology*, let. 386, str. 199–208, jul. 2021, doi: 10.1016/j.powtec.2021.03.044.
- [6] C. Windows-Yule in A. Neveu, »Calibration of DEM simulations for dynamic particulate systems«, *Pap. Phys.*, let. 14, str. 140010, jul. 2022, doi: 10.4279/pip.140010.
- [7] B. D. Jenkins *idr.*, »The sensitivity of powder characterization tool measurements to particle properties«, *Powder Technology*, let. 448, str. 120231, dec. 2024, doi: 10.1016/j.powtec.2024.120231.
- [8] C. J. Coetzee, »Review: Calibration of the discrete element method«, *Powder Technology*, let. 310, str. 104–142, apr. 2017, doi: 10.1016/j.powtec.2017.01.015.
- [9] T. Roessler in A. Katterfeld, »Scaling of the angle of repose test and its influence on the calibration of DEM parameters using upscaled particles«, *Powder Technology*, let. 330, str. 58–66, maj 2018, doi: 10.1016/j.powtec.2018.01.044.
- [10] »GranuDigitalTwins · GitLab«, GitLab. Pridobljeno: 16. julij 2026. [Na spletu]. Dostopno na: <https://gitlab.com/gdigitaltwins>
- [11] M. Motaln in T. Lerher, »Innovative Approaches to Wear Reduction in Horizontal Powder Screw Conveyors: A Design of Experiments-Guided Numerical Study«, *Applied Sciences*, let. 14, št. 7, Art. št. 7, jan. 2024, doi: 10.3390/app14073064.
- [12] W. Ketterhagen in C. Wassgren, »A perspective on calibration and application of DEM models for simulation of industrial bulk powder processes«, *Powder Technology*, let. 402, str. 117301, apr. 2022, doi: 10.1016/j.powtec.2022.117301.



Numerično modeliranje mehanskega odziva stohastičnih TPMS-struktur, izdelanih z dodajalno tehnologijo in litjem

Nejc Novak¹, Vid Skaza¹, Oraib Al-Ketan², Matej Vesenjak¹ in Zoran Ren¹

Numerical Modelling of the Mechanical Response of Stochastic TPMS Structures Manufactured by Additive Manufacturing and Casting

Povzetek. Celične strukture na osnovi trojno periodičnih minimalnih površin (ang. »Triply Periodic Minimal Surface – TPMS«) predstavljajo perspektivno skupino celičnih struktur za uporabo v lahkih konstrukcijah zaradi ugodnega razmerja med maso in mehanskimi lastnostmi. V prispevku je predstavljeno numerično modeliranje stohastične TPMS strukture tipa Gyroid, izdelane z dodajalnimi tehnologijami in litjem. Geometrija struktur je bila generirana z uporabo implicitnih matematičnih funkcij, mehanske lastnosti pa so bile določene s kvazi-statičnimi in dinamičnimi tlačnimi preizkusi. Na podlagi eksperimentalnih rezultatov je bil razvit numerični model za uporabo v računalniških simulacijah po metodi končnih elementov. Primerjava numeričnih in eksperimentalnih rezultatov je pokazala dobro ujemanje mehanskega odziva ter potrdila vpliv proizvodnega postopka na učinkovite mehanske lastnosti struktur.

Abstract. Cellular structures based on triply periodic minimal surfaces (TPMS) represent a promising class of architected materials for lightweight engineering applications due to their favourable mass-to-mechanical-performance ratio. This paper presents the numerical modelling of a stochastic Gyroid-type TPMS structure manufactured by additive manufacturing and casting. The structural geometries were generated using implicit mathematical functions, while their mechanical properties were determined through quasi-static and dynamic compression tests. Based on the experimental results, a computational model was developed for implementation in finite element simulations. Comparison of the numerical and experimental results showed good agreement in the mechanical response and confirmed the influence of the manufacturing process on the effective mechanical properties of the structures.

1 Uvod

Celični materiali zaradi izjemno ugodnega razmerja med maso in mehanskimi lastnostmi predstavljajo pomembno skupino inženirskih materialov za uporabo v letalski, avtomobilski in obrambni industriji [1]. Njihova značilnost je visoka sposobnost absorpcije energije ob

¹ Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo

² New York University Abu Dhabi, Core Technology Platforms Operations

relativno nizki gostoti, zaradi česar so primerni za lahke konstrukcije in zaščitne sisteme. Glede na topologijo osnovne celice jih običajno delimo na periodične mrežne strukture ter stohastične celične strukture. Medtem ko periodične strukture pogosto izkazujejo anizotropen mehanski odziv, imajo stohastične strukture praviloma bolj izotropne lastnosti, kar je posebej pomembno pri aplikacijah, kjer smer obremenitve ni vnaprej znana.

Hiter razvoj dodajalnih tehnologij je v zadnjem desetletju bistveno razširil možnosti izdelave celičnih struktur s kompleksno notranjo geometrijo. V nasprotju s klasičnimi postopki penjenja omogočajo dodajalne tehnologije načrtovanje celičnih materialov na podlagi geometrije, pri čemer je mogoče natančno določati lokalno poroznost, razporeditev materiala in morfologijo celic. V zadnjem času pridobivajo vedno večji pomen celične strukture na osnovi trojno periodičnih minimalnih površin (ang. »triply periodic minimal surface – TPMS«), katerih geometrija je enolično določena z implicitnimi funkcijami [2,3].

Za TPMS strukture so značilni zvezni prehodi med celicami brez koncentracij napetosti in enakomerna porazdelitev materiala v prostoru, kakor tudi možnost zveznega gradiranja njihove poroznosti v prostoru. Zaradi teh lastnosti pogosto dosegajo višjo specifično togost, boljšo absorpcijo energije in enakomernejši prenos obremenitev kot klasične celične strukture [4]. Poleg periodičnih TPMS geometrij so v zadnjih letih vse več pozornosti deležne tudi stohastične TPMS strukture, pri katerih je osnovna geometrija odvisna od naključnih prostorskih odstopanj. Takšne strukture bolje posnemajo naravne celične materiale in omogočajo doseganje skoraj izotropnega mehanskega odziva [5]. Razvoj metod generiranja stohastičnih TPMS struktur temelji na različnih numeričnih pristopih, kot so Voronoijeve teselacije, rekonstrukcija geometrije iz računalniške tomografije ter implicitne matematične funkcije [6]. Med najbolj obetavnimi pristopi se uveljavljajo implicitni modeli, ki omogočajo natančno kontrolirano uvajanje stohastičnosti ob hkratnem ohranjanju topološke povezanosti strukture. Takšen pristop omogoča načrtovanje celičnih materialov z vnaprej določenimi mehanskimi lastnostmi in predstavlja pomemben korak proti razvoju digitalnih dvojčkov poroznih struktur.

Kljub hitremu napredku na področju načrtovanja TPMS geometrij ostaja proizvodnja teh struktur pomemben izziv. Dodajalne tehnologije omogočajo neposredno izdelavo kompleksnih geometrij, vendar jih pogosto spremlja površinska hrapavost, geometrijska odstopanja, prisotnost delno zataljenega prahu. Prav tako so te izdelovalne tehnologije pri proizvodnji kosov večjih dimenzij ali količin bistveno dražje. Postopki litja predstavljajo ekonomsko zanimivo rešitev za serijsko proizvodnjo, vendar lahko povzročajo drugačne vrste napak, kot so mikroporoznost, nehomogena mikrostruktura in odstopanja debeline sten [7]. Zaradi tega se lahko mehanske lastnosti struktur z enako nominalno geometrijo bistveno razlikujejo glede na uporabljeni proizvodni postopek.

Večina dosedanjih raziskav se osredotoča predvsem na eksperimentalno karakterizacijo periodičnih TPMS struktur, izdelanih z dodajalnimi tehnologijami, pri čemer so mehanske lastnosti običajno določene na osnovi kvazi-statičnih preizkusov [8]. Manj pozornosti je namenjeno stohastičnim TPMS strukturam, še posebej pa vplivu proizvodnega postopka na njihov mehanski odziv. Namen te študije je predstaviti numerični model za stohastične TPMS strukture, proizvedene z dodajalnimi tehnologijami in litjem, ki omogoča napovedovanje njihovih mehanskih lastnosti na makroskopskem nivoju.

2 Materiali in metode

2.1 Geometrija

Geometrija stohastičnih celičnih struktur je zasnovana na podlagi metodologije, ki so jo predstavili Yang in sodelavci [9], kasneje pa jo je za doseganje izotropnih mehanskih lastnosti nadgradil Al-Ketan s sodelavci [6]. Metoda temelji na uporabi implicitnih matematičnih funkcij, ki omogočajo generiranje stohastičnih poroznih struktur ob hkratnem ohranjanju topološke povezanosti materiala. Kot osnovna geometrija je bila izbrana TPMS struktura tipa Gyroid. Izbira temelji na ugodnem razmerju med togostjo in maso ter na visoki specifični površini, ki jo ta geometrija dosega v primerjavi z drugimi TPMS topologijami. Gyroid strukture omogočajo enakomerno porazdelitev napetosti in zmanjšujejo pojav lokalnih koncentracij napetosti zaradi zveznosti površin brez ostrih prehodov. Stohastičnost geometrije je bila uvedena z naključnimi lokalnimi spremembami implicitne funkcije, pri čemer je bila ohranjena globalna povezanost strukture. Tak pristop omogoča doseganje skoraj izotropnega mehanskega odziva in bolj realistično simulacijo naravno prisotnih geometrijskih nepravilnosti.

Vsi vzorci so bili zasnovani z nominalno relativno gostoto 20 % in so prikazani na sliki 1, pri čemer je bila relativna gostota definirana kot razmerje med prostornino materiala in celotno prostornino vzorca. Zunanja geometrija vzorcev je bila valjaste oblike s premerom 18 mm in višino 18 mm.

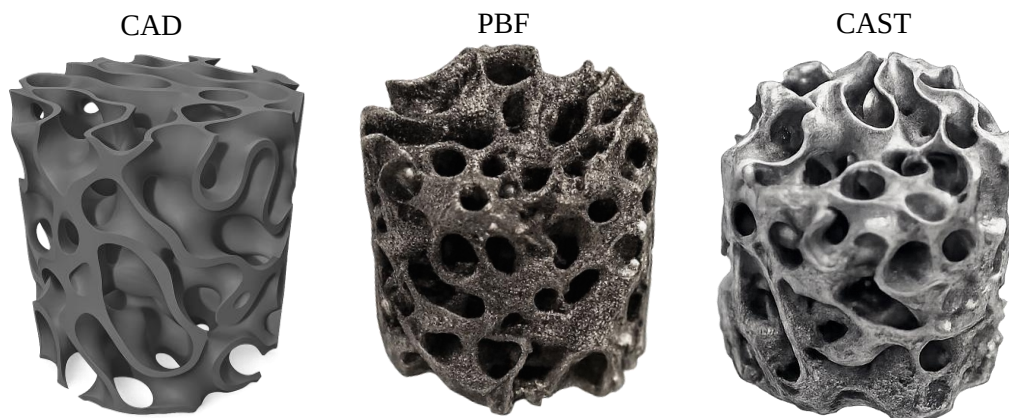
2.2 Izdelava

V študiji sta bila uporabljena dva proizvodna postopka, ki predstavljata bistveno različna pristopa izdelave kompleksnih celičnih struktur. Pri obeh je bil uporabljen enak osnovni material, in sicer aluminijeva zlitina AlSi10Mg.

Prva skupina vzorcev je bila izdelana z dodajalno tehnologijo laserskega taljenja v prašni postelji (ang. »Laser Powder Bed Fusion« – LPBF, ali tudi v tem delu krajše PBF). Postopek omogoča neposredno izdelavo kompleksnih TPMS geometrij z visoko stopnjo geometrijske svobode in dobro ponovljivostjo procesa. Druga skupina vzorcev je bila izdelana s postopkom litja (CAST), pri katerem so bile livarske forme izdelane iz keramike na osnovi 3D natisnjenih modelov iz voska po postopku DLP (ang. »Digital Light Processing«). Takšen pristop združuje geometrijsko fleksibilnost dodajalnih tehnologij z ekonomskimi prednostmi klasičnih livarskih postopkov pri izdelavi večjega števila komponent.

Po izdelavi so bili vsi vzorci, ki so prikazani na sliki 1, očiščeni in pripravljeni za nadaljnje meritve. Za oceno kakovosti izdelave so bile opravljene meritve dimenzij, mase in relativne gostote, ki so omogočile primerjavo med načrtovano in dejansko geometrijo. Izmerjene mase vzorcev so bile 2,63 g za PBF vzorce in 3,46 g za CAST vzorce, kar rezultira v dejanski relativni gostoti 21,3 % za PBF vzorce in 28,0 % za CAST vzorce. Odstopanje pri

CAST vzorcih je posledica postopka izdelave, saj so bili vzorci iz voska izdelani s pravilno geometrijo, ki pa se potem pri postopku izdelave kalupa in litja nekoliko spremeni.



Slika 1: Načrtovani in izdelani vzorci

2.3 Eksperimentalno testiranje

Kvazi-statično mehansko tlačno testiranje je bilo izvedeno na preizkusnem stroju INSTRON 8801 v skladu s standardom ISO 13314:2011 [10]. Sklop dinamičnih preizkusov je bil izveden s Taylorjevim testom, pri katerem je bil projektil s preizkušancem pospešen z eksplozijo smodnika (angl. »Powder Gun«) na testno udarno hitrost med 150 in 600 m/s. Preizkušanec z veliko hitrostjo trči v togo podlago v vakuumski komori, pri čemer visokofrekvenčni senzor tlaka meri povprečen kontaktni tlak, hitra kamera pa omogoča spremljanje procesa deformiranja med udarcem [11].

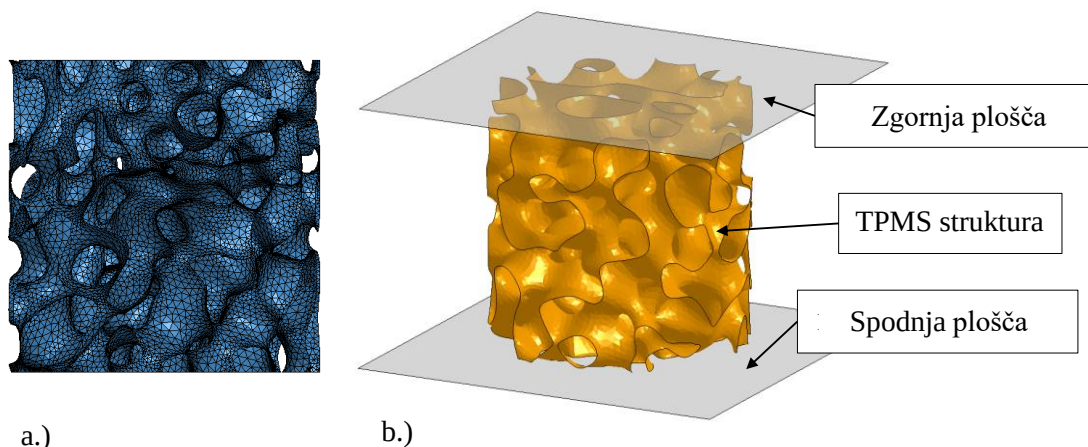
Hitrost obremenjevanja je bila konstantna, in sicer 0,1 mm/s (kvazi-statično testiranje-QS) in 300 m/s (dinamično testiranje - HSR), kar je rezultiralo v hitrostih deformacije 0,006 1/s in 16666,7 1/s. Za vsako kombinacijo proizvodnega postopka in obremenitvenega režima je bilo izdelanih in preizkušenih vsaj 3 ponovitve, kar je omogočilo statistično ovrednotenje rezultatov. Rezultati testiranja so bili pretvorjeni v inženirske vrednosti napetosti in deformacije na osnovi začetne geometrije vzorcev. Napetost platoja je bila določena kot povprečna vrednost tlačne napetosti v območju med 20 % in 40 % inženirske deformacije. Specifična absorpcijska energija (SEA) je bila izračunana po naslednji enačbi:

$$SEA = \frac{\int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon}{\rho_{povp}}, \quad (1)$$

kjer je σ inženirska napetost, ϵ inženirska deformacija in ρ_{povp} povprečna gostota preizkušanca. Tako dobljena vrednost predstavlja absorbirano energijo na enoto mase in je eden ključnih parametrov za vrednotenje energijsko absorpcijskih sposobnosti celičnih struktur.

3 Razvoj računalniškega modela

Računalniški model temelji na geometriji stohastične TPMS strukture tipa Gyroid, opisane v prejšnjem poglavju. Izvorni CAD model je bil generiran z uporabo implicitne matematične funkcije, ki omogoča natančen opis kompleksne prostorske geometrije in enostavno prilagajanje relativne gostote. Za potrebe numeričnih analiz je bila geometrija pretvorjena v diskretiziran površinski model, primeren za metodo končnih elementov v programskem paketu LS-DYNA. Zaradi kompleksnosti topologije je bila posebna pozornost namenjena kakovosti mreže in pravilni predstavitvi lokalnih ukrivljenosti površin, kar je prikazano na sliki 2.



Slika 2: Diskretiziran model (a.) in robni pogoji (b.) računalniškega modela

Pred izvedbo analiz so bili preverjeni vplivi velikosti elementov na rezultate simulacij, pri čemer je bila izbrana velikost mreže, ki zagotavlja ustrezno ravnovesje med računsko zahtevnostjo in natančnostjo rezultatov. Uporabljeni so bili preprosti robni pogoji (Slika 2b), kjer je bila TPMS struktura obremenjena z dvema togima ploščama. Zgornja plošča je imela predpisano konstantno hitrost premikanja proti strukturi, spodnja plošča pa je bila toga vpeta. Za opis mehanskega odziva osnovnega materiala je bil uporabljen elasto-plastični materialni model (MAT_024) brez porušitve, katerega parametri so bili določeni na podlagi vzvratne določitve materialnih parametrov na osnovi eksperimentalnih rezultatov TPMS struktur. Materialni podatki za vsak način proizvodnje vzorcev so podani v tabeli 1.

Tabela 1: Osnovni podatki materialnega modela

	Gostota ρ [kg/m ³]	Modul elastičnosti E [GPa]	Poissonovo število ν [-]	Napetost tečenja σ_y [MPa]	Tangentni modul E_T [MPa]
PBF	2770	38	0,34	285	157
CAST	2770	32	0,34	185	151

Dobljeni vrednosti modula elastičnosti (38 GPa za PBF in 32 GPa za CAST) sta bistveno nižji od modula polne zlitine AlSi10Mg, saj predstavljata efektivni elastični modul materialnega modela. Takšen pristop upošteva zmanjšanje globalne togosti zaradi površinske hrapavosti, mikro- in makroporoznosti, proizvodnih napak ter geometrijskih odstopanj, ki jih eksplicitni

homogenizirani model ne opisuje neposredno, njihov vpliv pa je zajet preko kalibracije materialnih parametrov na eksperimentalne rezultate.

4 Rezultati in diskusija

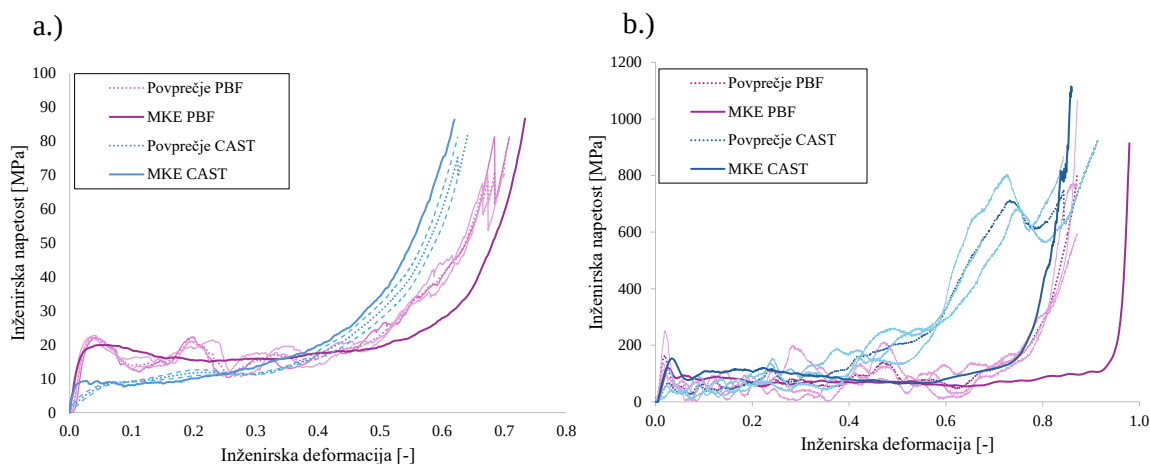
4.1 Primerjava eksperimentalnih in numeričnih rezultatov

Za validacijo razvitega materialnega modela so bili rezultati numeričnih simulacij primerjani z eksperimentalnimi tlačnimi preizkusi vzorcev, izdelanih z dodajalno tehnologijo PBF in postopkom litja.

Slika 3 prikazuje primerjavo eksperimentalnih in numerično določenih napetostno-deformacijskih krivulj za oba proizvodna postopka in obe hitrosti obremenjevanja. Opaziti je dobro ujemanje začetnega linearne območja pri PBF vzorcih, kar potrjuje pravilno identifikacijo efektivnega modula elastičnosti v homogeniziranem modelu.

V območju progresivnega deformiranja pri konstantni napetosti se pojavijo manjša odstopanja med simulacijo in eksperimentom. Ta odstopanja so pričakovana, saj numerični model ne zajema vseh lokalnih geometrijskih nepravilnosti, ki nastanejo med proizvodnim procesom. Kljub temu model uspešno reproducira splošni trend deformacijskega odziva in napove območje začetka zgoščevanja strukture.

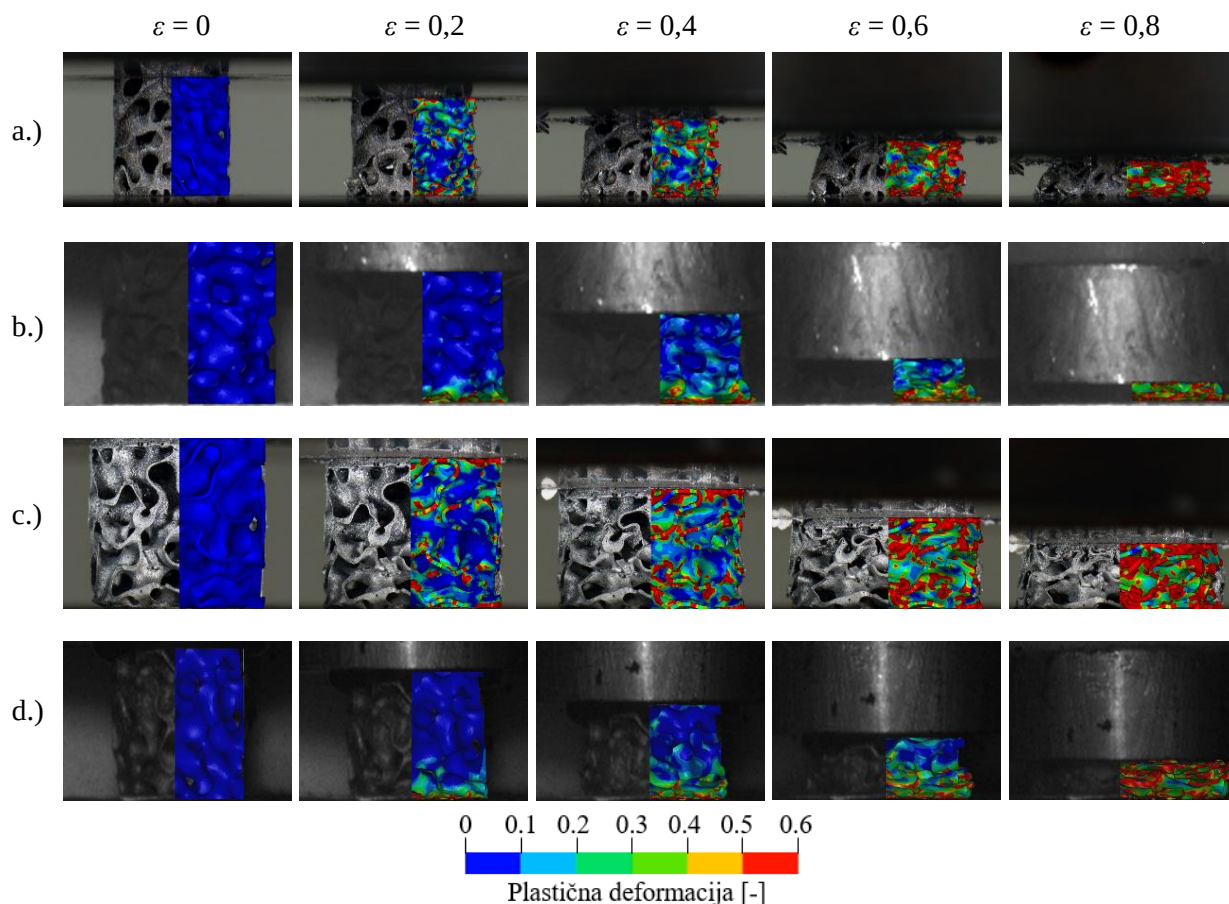
Pri visoko hitrotnem obremenjevanju so razlike med proizvodnima postopkoma izrazitejše. CAST vzorci izkazujejo bistveno višjo nosilnost in izrazitejše utrjevanje med zgoščevanjem kot PBF vzorci, kar je posledica bolj duktilnega deformacijskega obnašanja (slika 4). Razviti numerični model ustrezno napove splošni potek deformacijskega odziva pri obeh hitrostih obremenjevanja, vendar so pri HSR preizkusih opazna večja odstopanja v območju lokalnih vrhov napetosti, ki jih povzročajo lokalizirano deformiranje, inercialni učinki ter eksperimentalna variabilnost. Kljub temu numerične simulacije dobro zajamejo povprečni odziv obeh proizvodnih postopkov, kar potrjuje primernost razvitega numeričnega modela za simulacijo kompleksnih TPMS struktur v širokem območju deformacijskih hitrosti.



Slika 3: Primerjava kvazi-statičnih (QS) (a.) in visoko hitrotnih (HSR) (b.) odzivov

Eksperimentalna opazovanja in numerične simulacije kažejo podobne mehanizme deformacije pri obeh proizvodnih postopkih, kar je prikazano na sliki 4. V začetni fazi QS obremenjevanja prihaja do enakomerne porazdelitve napetosti po celični strukturi. Z naraščanjem deformacije se pojavijo lokalna območja koncentracije napetosti, ki povzročijo postopno porušitev posameznih segmentov Gyroid geometrije. Pri litih vzorcih je v začetni fazi obremenjevanja opazna pričakovana porušitev lokalnih nepravilnosti, kot so predvsem praznine in lunke, ki so nastali zaradi narave postopka izdelave, zato je numerični odziv na začetku dosti višji od eksperimentalnega. Pri višjih stopnjah deformacije pa lahko opazimo zgodnejše zgoščevanje, saj v postopku izdelave pride do popačenja geometrije in začnejo stene strukture prej nalegati ena na drugo. Numerični model uspešno napove lokacijo glavnih deformacijskih con in splošni potek kolapsa strukture, kar potrjuje pravilno identifikacijo učinkovitih materialnih parametrov.

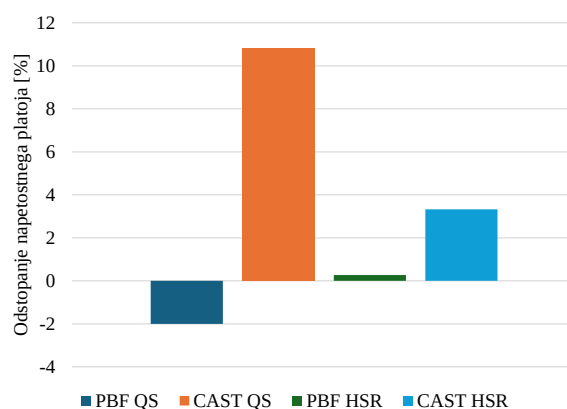
Pri visoko hitrostnem (HSR) obremenjevanju je opazna izrazita lokalizacija deformacije v območju udarca, ki nastane zaradi vztrajnostnih učinkov pri visokih hitrostih obremenjevanja [12]. Podrobna analiza posnetkov hitre kamere pokaže bistvene razlike v mehanizmu deformiranja med PBF in CAST vzorci. Pri PBF vzorcih zaradi lokalnih koncentracij napetosti pride do porušitve posameznih delov materiala, ki se med deformacijo odlomijo od strukture, kar se kaže kot nastanek drobnih delcev oziroma prašnega oblaka v okolici vzorca. Nasprotno pri CAST vzorcih material ohrani svojo integriteto in ostane povezan s strukturo, zato se deformacija lokalizira brez odloma materiala. Posledično pride do hitrejšega zapiranja por in zgodnejšega zgoščevanja strukture, kar se odraža v višjih napetostih že v območju napetostnega platoja.



Slika 4: Primerjava eksperimentalnih in numeričnih deformacijskih odzivov PBF QS (a.), PBF HSR (b.), CAST QS (c.) in CAST HSR (d.)

Slika 5 prikazuje odstopanje med eksperimentalno in numerično določenim povprečnim napetostnim platojem za PBF in CAST strukture pri kvazi-statičnem (QS) in visoko hitrostnem (HSR) obremenjevanju. Razviti numerični model zelo dobro napove napetost platoja pri PBF strukturah, kjer odstopanje znaša približno $-2,0\%$ pri QS in $1e 0,2\%$ pri HSR obremenjevanju. Nekoliko večja odstopanja so opazna pri CAST strukturah, in sicer $10,8\%$ pri QS ter $3,3\%$ pri HSR obremenjevanju. Kljub temu so vsa odstopanja manjša od 11% , kar kaže na dobro natančnost razvitega materialnega modela. Največje odstopanje pri CAST QS vzorcih je mogoče pripisati večji variabilnosti litih struktur, ki izhaja iz proizvodnega postopka, medtem ko izboljšano ujemanje pri HSR obremenjevanju nakazuje, da model uspešno zajame prevladujoče mehanizme deformiranja tudi pri visokih hitrostih deformacije. Rezultati

potrjujejo, da je razviti numerični model primeren za napovedovanje efektivnega mehanskega odziva tako PBF kot tudi litih TPMS struktur v širokem območju obremenitvenih hitrosti.



Slika 5: Primerjava eksperimentalnih in numeričnih vrednosti napetostnega platoja

4.2 Vpliv proizvodnega postopka na mehanske lastnosti

Primerjava eksperimentalnih rezultatov jasno kaže, da uporabljeni proizvodni postopek pomembno vpliva na efektivne mehanske lastnosti stohastičnih TPMS struktur. Tabela 2 prikazuje primerjavo ključnih mehanskih parametrov PBF in CAST struktur pri kvazi-statičnem (QS) in visoko hitrostnem (HSR) obremenjevanju. Pri kvazi-statičnih preizkusih PBF strukture dosegajo večjo deformacijo pri začetku zgoščevanja ($\varepsilon_d = 0,48$) kot CAST strukture ($\varepsilon_d = 0,390$), kar pomeni, da lahko absorbirajo več deformacije pred začetkom intenzivnega zgoščevanja. Enak trend je opazen tudi pri specifični absorpcijski energiji (SEA), kjer PBF vzorci dosežejo približno 2,5-krat višje vrednosti (13,50 J/g) od CAST vzorcev (5,46 J/g), medtem ko sta povprečni napetosti platoja primerljivi (15,57 MPa pri PBF in 12,60 MPa pri CAST).

Pri visoko hitrostnem obremenjevanju se odziv obeh proizvodnih postopkov bistveno spremeni. PBF vzorci še vedno izkazujejo največjo skupno absorpcijo energije (SEA = 82,31 J/g) in največjo deformacijo pri zgoščevanju ($\varepsilon_d = 0,66$), kar kaže na večjo sposobnost absorpcije energije pri velikih deformacijah. Nasprotno CAST vzorci dosežejo izrazito višjo napetost platoja (94,90 MPa), ki je približno 43 % višja od PBF vzorcev (66,52 MPa). To potrjuje opažanja hitre kamere, da pri litih strukturah zaradi ohranjene integritete strukture pride do zgodnejšega stikanja površin in hitrejšega utrjevanja strukture, medtem ko pri PBF lokalno odlamljanje materiala zmanjša nosilnost v plato območju, vendar omogočita večjo deformabilnost in posledično večjo skupno absorpcijo energije.

Tabela 2: Primerjava eksperimentalnih podatkov

	PBF QS	PBF HSR	CAST QS	CAST HSR
Deformacija pri zgoščevanju ε_d	0,48	0,66	0,39	0,4
SEA do ε_d [J/g]	13,50	82,31	5,46	36,33
SEA do $\varepsilon_{40\%}$ [J/g]	11,04	44,72	5,59	36,33
Napetostni plato [MPa]	15,57	66,52	12,6	94,90

5 Zaključek

V prispevku je predstavljen razviti numerični model za računalniško simulacijo stohastičnih Gyroid TPMS struktur, izdelanih z dodajalnimi tehnologijami (PBF) in litjem (CAST). Model je bil kalibriran na podlagi kvazi-statičnih in visoko hitrostnih tlačnih preizkusov ter implementiran v metodo končnih elementov. Primerjava eksperimentalnih in numeričnih rezultatov je pokazala dobro ujemanje mehanskega odziva pri obeh proizvodnih postopkih, pri čemer odstopanje napetosti platoja ni preseglo 11 %. Model zadovoljivo reproducira globalni napetostno-deformacijski odziv in približno območje začetka zgoščevanja za obravnavani geometriji in obremenitvena pogoja. Ugotovljene razlike so posledica kombinacije proizvodno pogojenih napak, razlik v dejanski relativni gostoti, sprememb geometrije ter razlik v lokalnem mehanskem obnašanju materiala.

Rezultati so pokazali, da ima proizvodni postopek pomemben vpliv na mehanski odziv celičnih struktur. Pri kvazi-statičnem obremenjevanju PBF strukture izkazujejo večjo deformabilnost, višjo deformacijo pri začetku zgoščevanja ter večjo specifično absorpcijo energije, kar kaže na učinkovitejšo izrabo razpoložljivega deformacijskega prostora. Po drugi strani liti (CAST) vzorci razvijejo nekoliko nižjo energijsko absorpcijo, vendar primerljivo nosilnost v območju napetostnega platoja. Pri visoko hitrostnem obremenjevanju so razlike med proizvodnima postopkoma še izrazitejše. Zaradi vztrajnostnih učinkov se deformacija lokalizira v območju udarca, pri čemer se pri PBF strukturah pojavi lokalni lom in odlamljanje posameznih sten, medtem ko liti vzorci ohranijo strukturno integriteto. Posledično pri CAST strukturah pride do hitrejšega zapiranja por in zgodnejšega utrjevanja, kar se odraža v približno 43 % višji napetosti platoja. Nasprotno PBF strukture kljub nižji nosilnosti omogočajo večje deformacije pred zgoščevanjem, zaradi česar dosežajo več kot dvakrat višjo specifično absorpcijo energije.

Rezultati raziskave hkrati kažejo, da izbira proizvodnega postopka ni odvisna zgolj od izdelovalnosti ali stroškov, temveč pomembno vpliva na način deformiranja in energijsko absorpcijsko učinkovitost struktur, kar je treba upoštevati pri načrtovanju celičnih materialov za zaščitne, transportne in druge dinamično obremenjene konstrukcije.

Literatura

- [1] L.J. Gibson, M.F. Ashby, *Cellular Solids: Structure and properties*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1997.
- [2] A.S. Dalaq, D.W. Abueidda, R.K. Abu Al-Rub, I.M. Jasiuk, Finite element prediction of effective elastic properties of interpenetrating phase composites with architected 3D sheet reinforcements, *Int. J. Solids Struct.* 83 (2016) 169–182. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.01.011>.
- [3] O. Al-Ketan, R.K. Abu Al-Rub, Multifunctional Mechanical Metamaterials Based on Triply Periodic Minimal Surface Lattices, *Adv. Eng. Mater.* 21 (2019). <https://doi.org/10.1002/adem.201900524>.
- [4] O. Al-Ketan, R. Rowshan, R.K. Abu Al-Rub, Topology-mechanical property relationship of 3D printed strut, skeletal, and sheet based periodic metallic cellular materials, *Addit. Manuf.* 19 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.addma.2017.12.006>.
- [5] N. Novak, O. Al-Ketan, A. Mauko, Y.E. Yilmaz, L. Krstulović-Opara, S. Tanaka, K. Hokamoto, R. Rowshan, R.A. Al-Rub, M. Vesenjak, Z. Ren, Impact loading of additively manufactured metallic stochastic sheet-based cellular material, *Int. J. Impact Eng.* 174 (2023) 104527. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2023.104527>.
- [6] O. Al-ketan, D. Lee, R.K.A. Al-rub, Mechanical properties of additively-manufactured sheet-based gyroidal stochastic cellular materials, *Addit. Manuf.* 48 (2021) 102418. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2021.102418>.
- [7] A. Singh, O. Al-Ketan, N. Karathanasopoulos, Mechanical performance of solid and sheet network-based stochastic interpenetrating phase composite materials, *Compos. Part B Eng.* 251 (2023) 110478. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2022.110478>.
- [8] N. Novak, O. Al-Ketan, L. Krstulović-Opara, R. Rowshan, R.K.A. Al-rub, M. Vesenjak, Z. Ren, Quasi-static and dynamic compressive behaviour of sheet TPMS cellular structures, *Compos. Struct.* 266 (2021) 113801. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113801>.
- [9] E. Yang, M. Leary, B. Lozanovski, D. Downing, M. Mazur, A. Sarker, A.M. Khorasani, A. Jones, T. Maconachie, S. Bateman, M. Easton, M. Qian, P. Choong, M. Brandt, Effect of geometry on the mechanical properties of Ti-6Al-4V Gyroid structures fabricated via SLM: A numerical study, *Mater. Des.* 184 (2019) 108165. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2019.108165>.
- [10] ISO 13314:2011 - Mechanical testing of metals - ductility testing - compression test for porous and cellular metals, International Organization for Standardization, Geneva, Switzerland, 2011. www.iso.org.
- [11] N. Novak, D. Kytir, V. Rada, T. Doktor, O. Al-ketan, R. Rowshan, M. Vesenjak, Z. Ren, Compression behaviour of TPMS-filled stainless steel tubes, *Mater. Sci. Eng. A.* 852 (2022) 143680. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2022.143680>.
- [12] N. Novak, M. Vesenjak, Z. Ren, High Strain Rate Hardening of Metallic Cellular Metamaterials, *J. Dyn. Behav. Mater.* (2024). <https://doi.org/10.1007/s40870-024-00425-x>.

Identifikacija obratovalne oblike strukture s premikajočo hitro kamero

Matic Krmelj¹, Martin Česnik^{1*}

¹ Univerza v Ljubljani, Fakulteta za Strojništvo, Aškerčeva cesta 6, 1000 Ljubljana

*martin.cesnik@fs.uni-lj.si

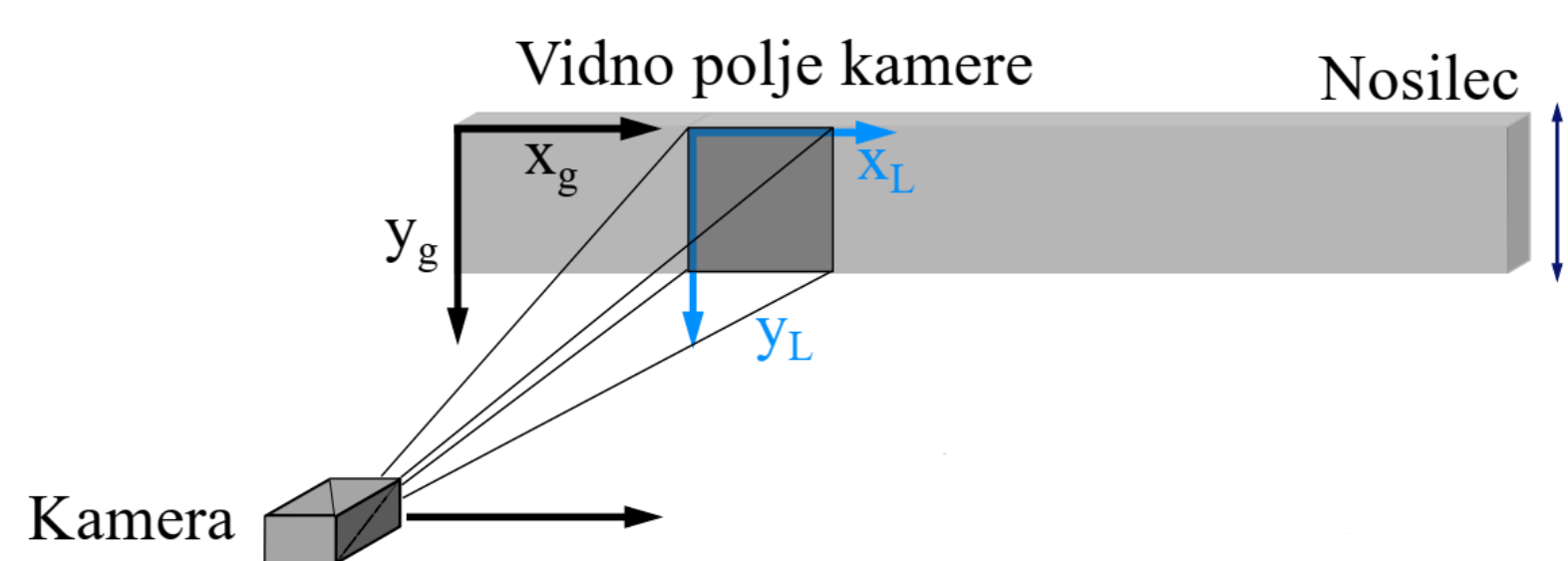
Ozadje problema

Predlagana metoda je namenjena izboljšanju prostorske ločljivosti, ki je problematična pri uporabi optičnih metod za modalno analizo. Kamera je postavljena bližje strukturi in se premika po njeni dolžini. S tem sta omogočeni boljša identifikacija obratovalne oblike in lokalizacija poškodb. S tem je prav tako olajšan problem enakomerne osvetlitve večjih objektov.

Pristop je razdeljen na tri stopnje:

1. Sledenje pozicije kamere
2. Identifikacija pomikov točk na strukturi
3. Identifikacija obratovalne oblike strukture

Koncept je prikazan na sliki 1.

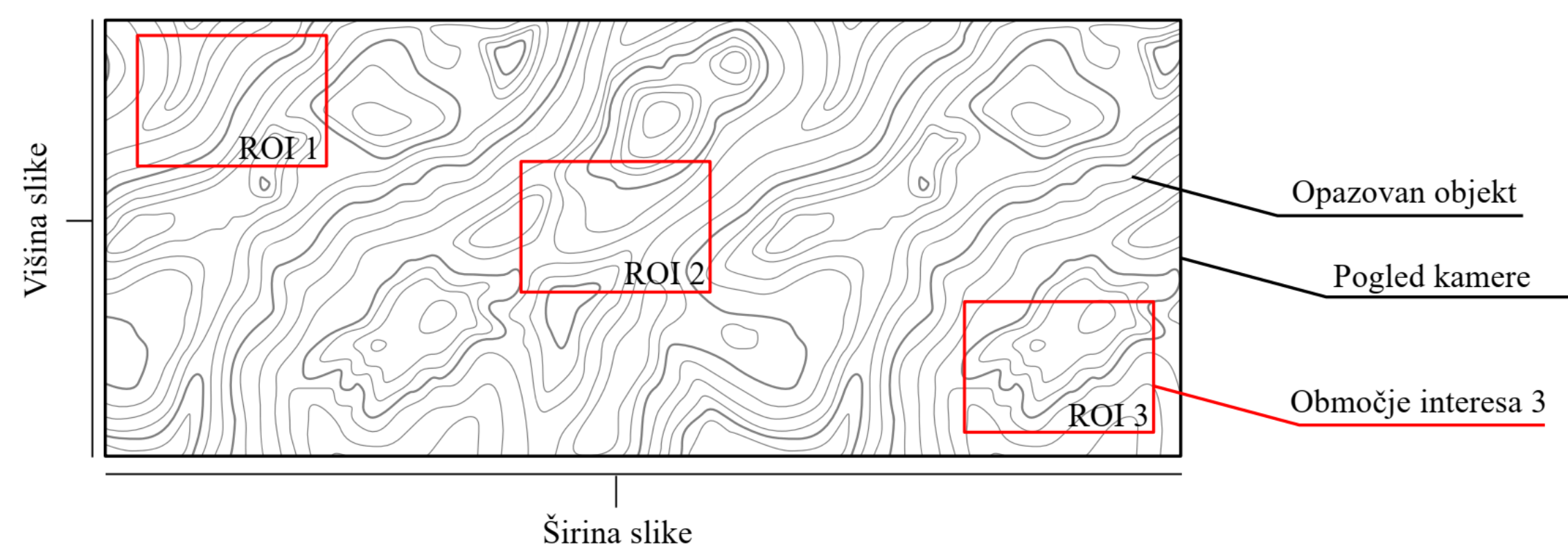


Slika 1: Konceptualizacija izvedbe obratovalne modalne analize s pomično kamero.

Metoda

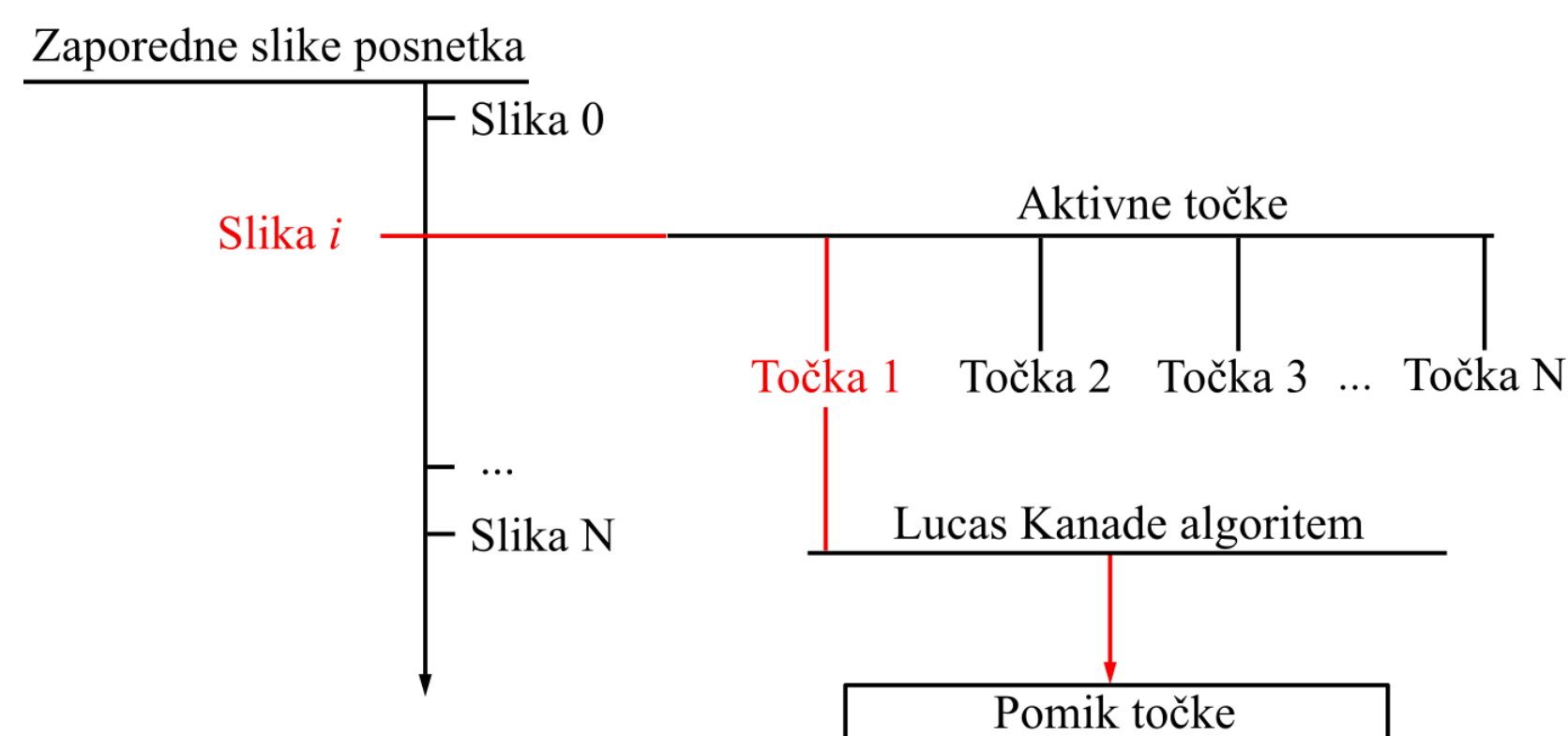
Metoda temelji na postavitvi dveh koordinatnih sistemov. Globalni koordinatni sistem je vezan na opazovan objekt. Lokalni koordinatni sistem je vezan na zorni kot kamere, in se premika skupaj z njim. Koordinatna sistema sta označena z »g« in »L« na sliki 1.

Iledenje pozicije kamere sestoji iz postavitve treh obsežnih območij interesa, znotraj katerih so računani pomiki v x-smeri. Postavitev je prikazana na sliki 2.



Slika 2: Postavitev območij interesa za identifikacijo gibanja kamere.

- Gibanje kamere posledično definira čas aktivnosti točke (čas, med katerim je točka na strukturi v zornem kotu kamere).
- Identifikacija pomikov točk poteka po shemi, prikazani na sliki 3.
- Zadnji korak je veriženje prenosnosti v obratovalno obliko. Postopek je prikazan na sliki 4 a). Primer pridobljene oblike je prikazan na sliki 4 b).
- Veriženje prenosnosti je za tem korigirano. Problematične točke (vozlišča) so preskočene, veriženje poteka preko opornih točk, ki problematično območje oklepajo.

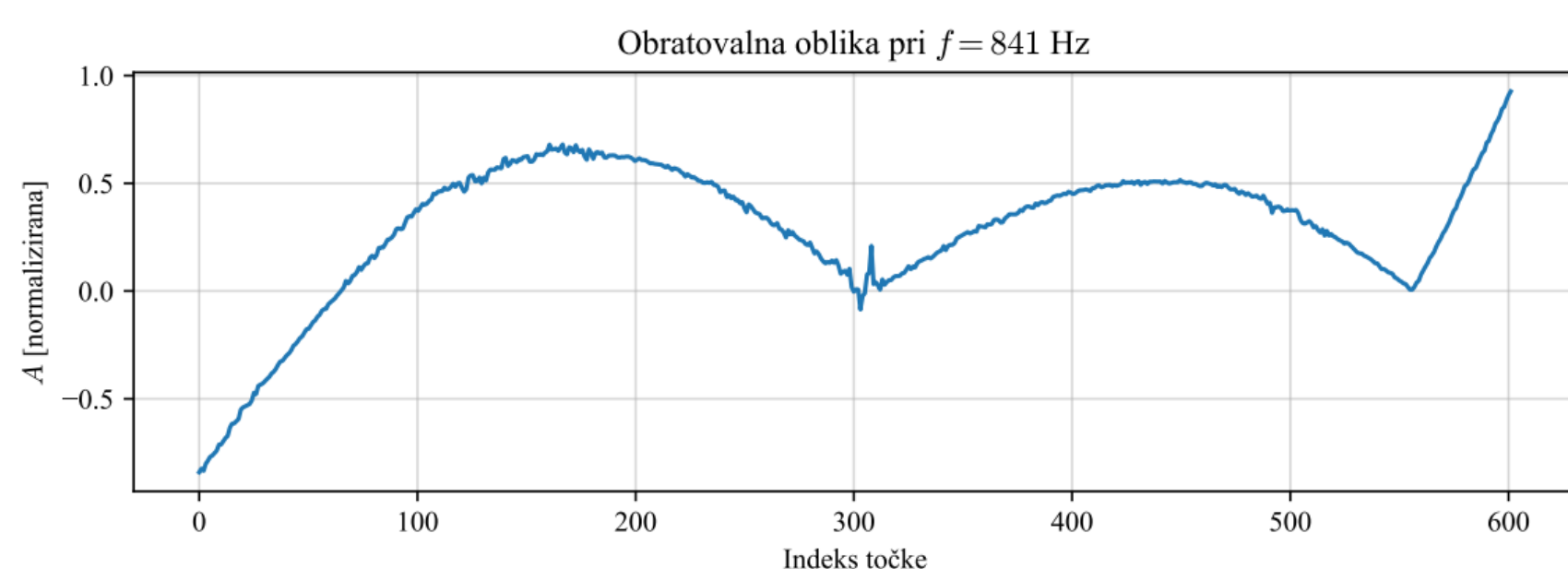


Slika 3: Algoritem za identifikacijo pomikov točk.

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ \Phi_1 &= 0 \\ \phi_m &= \sum_{n=0}^m \phi_{rel,n} \\ A_m &= \prod_{n=0}^m M_{rel,n} \end{aligned}$$

Prenosnost
- M_{rel}
- Φ_{rel}

Slika 4 a): Veriženje prenosnosti v obratovalno obliko.



Slika 4 b): Identificirana obratovalna oblika.

Eksperimentalni del

Slika 5 prikazuje eksperimentalno postavitve. Nosilec je bil skupaj s stresalnikom postavljen na voziček, ki je omogočal relativno gibanje.



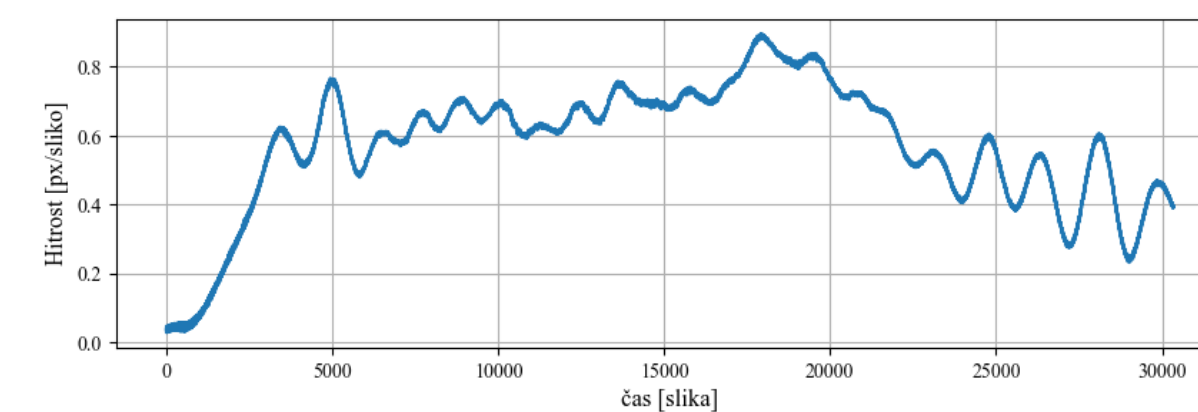
Slika 5: Eksperimentalna postavitve nosilca, vzbujanega preko elektrodinamskega stresalnika, in hitre kamere.

Postavljenih je bilo 600 točk, katerih postavitev je prikazana na sliki 6.



Slika 6: Rekonstruirana postavitev točk (označene z rdečo).

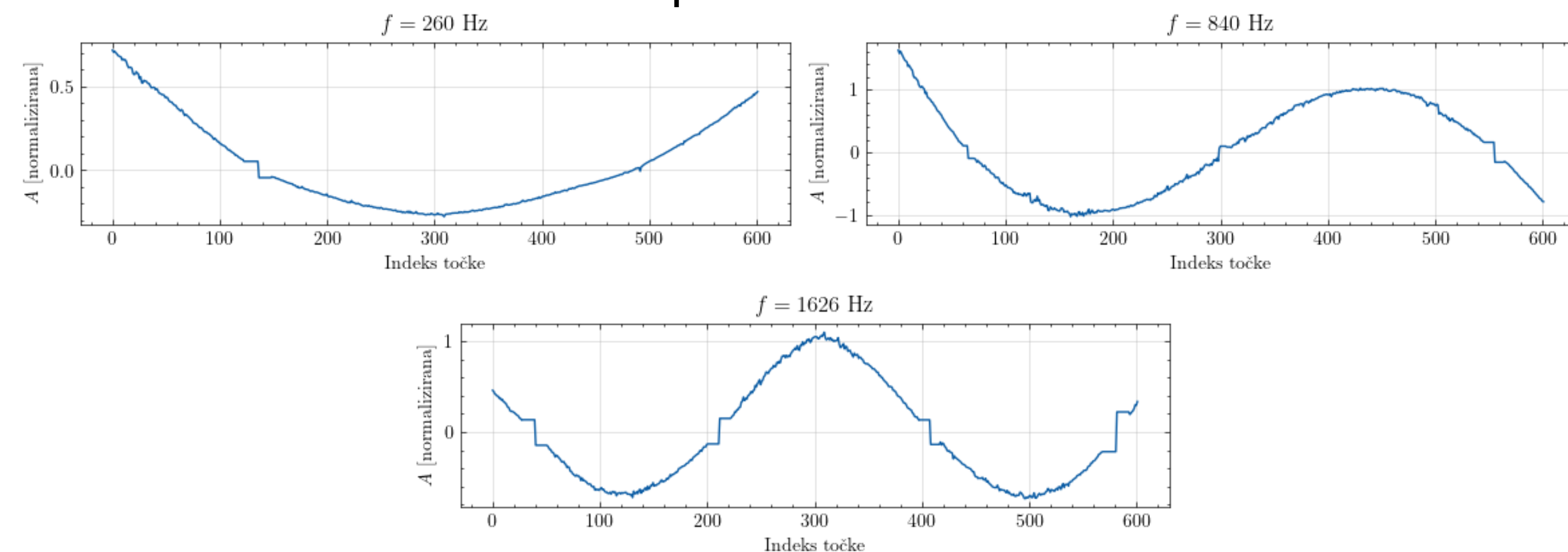
Identificirano je bilo gibanje kamere, prikazano na sliki 7.



Slika 7: Identificirana hitrost kamere v x-smeri.

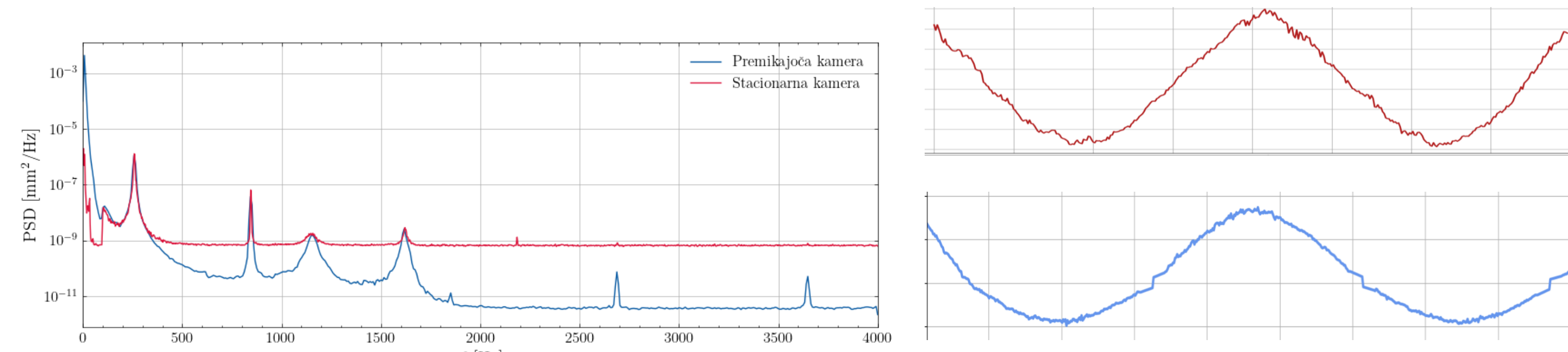
Rezultati

Prve štiri obratovalne oblike so prikazane na sliki 8.



Slika 8: Prve tri identificirane obratovalne oblike.

Slika 9 prikazuje primerjavo v magnitudnih spektrih (9 a)) in kvaliteti identifikacije (9 b)).



Slika 9 a): primerjava magnitudnih spektrov premikajoče (modra) in stacionarne (rdeča) kamere.

Slika 9 b): Primerjava identificiranih obratovalnih oblik pri 1626 Hz. Z modro je označen rezultat pomične kamere.

Zaključki

Metoda je izvedljiva in praktično uporabna. V primerjavi s pristopom stacionarne kamere omogoča bistveno bolj kakovostno identifikacijo pomikov točk.

Glavna slabost metode je odsotnost skupne referenčne točke, kar bi se dalo premostiti z uporabo hibridne metode, kjer bi skupno referenco pridobili s pospeškomerom.

Literatura

- [1] J. Javh, J. Slavič, and M. Boltežar, "High frequency modal identification on noisy high-speed camera data," MSSP, vol. 98, pp. 344–351, 2018.
- [2] B. D. Lucas and T. Kanade, "An iterative image registration technique with an application to stereo vision," in Proceedings of the 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence - Volume 2, IJCAI'81, (San Francisco, CA, USA), p. 674–679, Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1981.
- [3] J. Javh, Modalna analiza na podlagi meritev pomikov s hitro kamero. dr. disertacija, 2018.
- [4] S. Baker and I. Matthews, "Lucas-kanade 20 years on: A unifying framework," IJCV, vol. 56, pp. 221–255, 02 2004.

Zeleni vodik - vaša priložnost, naša odgovornost



Messerjev krovní cilj ni le zmanjšati lastni ogljični odtis, temveč tudi podpirati naše stranke pri zmanjševanju emisij njihovih aplikacij, kar dosežemo tako z uporabo naših aplikacij kot tudi z učinkovito oskrbo s plini.

Dosledno uporabljamo okolju prijazne možnosti, ki jih ponuja vodik kot alternativa fosilnim gorivom. Že od leta 2011 smo dobavitelj tehnološke opreme in vodika za enega izmed največjih vozniš parkov avtobusov na gorivne celice (FCEB) v ZDA.



Skupaj poiščimo najboljšo
rešitev za vas.

Izkoristite izkušnje naših
strokovnjakov za vodik.

Messer Slovenija d.o.o.

Jugova ulica 20, 2342 Ruše
hydrogen.si@messergroup.com

www.messer.si
hydrogen.messergroup.com